

Sammanfattning föreläsning 5, Linjär algebra IT, VT2021

Determinanten av en 2×2 -matris A är

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Låt D vara parallelogrammen som spänns upp av kolumnerna i A . Då gäller att

$$\text{area}(D) = |\det(A)|.$$

Speciellt gäller också att $\det(A) = 0$ om och endast om kolumnerna i A är parallella.

Determinanten av en 3×3 -matris A är

$$\det(A) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = x_1(y_2z_3 - y_3z_2) + x_2(y_3z_1 - y_1z_3) + x_3(y_1z_2 - y_2z_1).$$

Om

$$A = (\mathbf{u} \quad \mathbf{v} \quad \mathbf{w}) \quad \text{så är} \quad \det(A) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}.$$

Dessutom gäller att om V är volymen av parallelepipeden som spänns upp av kolumnerna i A så gäller att

$$\det(A) = \begin{cases} V, & \text{om } (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \text{ är högerorienterad,} \\ -V, & \text{om } (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \text{ är vänsterorienterad.} \end{cases}$$

Räkneregler för determinant

1. $\det(\mathbf{e}_x \quad \mathbf{e}_y \quad \mathbf{e}_z) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$
2. $\det(c\mathbf{u} \quad \mathbf{v} \quad \mathbf{w}) = c \cdot \det(\mathbf{u} \quad \mathbf{v} \quad \mathbf{w})$
3. $\det(\mathbf{u} \quad \mathbf{v} \quad \mathbf{w}) = -\det(\mathbf{v} \quad \mathbf{u} \quad \mathbf{w}) = -\det(\mathbf{w} \quad \mathbf{v} \quad \mathbf{u})$
4. $\det(\mathbf{u} \quad \mathbf{v} \quad \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = \det(\mathbf{u} \quad \mathbf{v} \quad \mathbf{w}_1) + \det(\mathbf{u} \quad \mathbf{v} \quad \mathbf{w}_2)$
5. $\det(\mathbf{u} \quad \mathbf{u} \quad \mathbf{w}) = 0$
6. $\det(A) = \det(A^t)$

För 2×2 -matriser respektive 3×3 -matriser är

$$I_2 = (\mathbf{e}_x \quad \mathbf{e}_y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{respektive} \quad I_3 = (\mathbf{e}_x \quad \mathbf{e}_y \quad \mathbf{e}_z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

unika identiteter (för multiplikation).

En 2×2 -matris

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

har en invers A^{-1} om och endast om $\det(A) \neq 0$ och i så fall är den

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$