

Pass 2 - Datum 01/02/2021 - Avsnitt 1.4-1.6

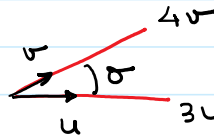
Kapitel 1 Basövningar sidan 50

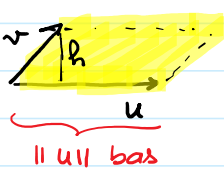
1.7 a) $\|u \times v\| = \|u\| \|v\| \sin \theta$
 $= 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

 $\theta = \pi/6 = 30^\circ$

 $\frac{1}{2} = \sin \pi/6$
 $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \pi/6$

b) $\|3u \times 4v\| = \|3u\| \|4v\| \sin \theta$
 $= 3 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} =$
 $= 12 \cdot \frac{1}{2} = 6$

 $\theta = \pi/6 = 30^\circ$

c)  $\left. \begin{array}{l} h = \text{högt} \\ \|u\| \text{ bas} \end{array} \right\} \text{Area} = \text{bas} \times \text{högt}$
 $\text{Area} = \|u\| \|v\| \sin \theta = \|u \times v\| = \frac{1}{2}$

d) $(3u - 4v) \times (u + 5v)$ proposition 1.32 sidan 27
 egenskap 3
 $(3u - 4v) \times u + (3u - 4v) \times (5v) =$
 $(3u \times u - 4v \times u) + 5(3u \times v - 4v \times v) =$
 $3 \cdot 0 + 4u \times v + 15u \times v - 4 \cdot 0 = 19u \times v$

1.8 Hypotes: (u, v, w) är högerorienterad.

a) $(\underbrace{v, u, w}_{1 \text{ gång}}) = -1(u, v, w)$ vänsterorienterad

b) $(-u, v, w) = -1(u, v, w)$ vänsterorienterad

c) $(v, u, -w) = -(\underbrace{v, u, w}_{1 \text{ gång}}) = -(-1)(u, v, w) = +1(u, v, w)$
 högerorienterad

d) $(-w, u, -v) = (-1)(-1)(\underbrace{w, u, v}_{1 \text{ gång}}) =$
 $= -(u, w, v) = (-1)(-1)(u, v, w) = +1(u, v, w)$
 högerorienterad.

$$d) (-w, u, -v) = (-1)(-1)(w, u, v) = \\ = -(u, w, v) = (-1)(-1)(u, v, w) = +(uvw) \\ \text{högerorienterad.}$$

$$1.9 \ a) \ P = (1, -4, -3) \quad \overrightarrow{PQ} = Q - P = (-3, -2, 4) \\ Q = (-2, -6, 1) \\ R = (5, 1, -1) \quad \overrightarrow{QS} = S - Q = (4, 5, 2) \\ S = (2, -1, 3) \\ \overrightarrow{SR} = R - S = (3, 2, -4) = -\overrightarrow{PQ}$$

$$\text{Då} \quad \overrightarrow{PQ} = (-1)\overrightarrow{SR} \quad \overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{SR} \quad (\overrightarrow{PQ} \text{ parallell med } \overrightarrow{SR})$$

($\overrightarrow{PQ}$ är linjär kombination av $\overrightarrow{SR}$)

b) bestäm koordinaterna för

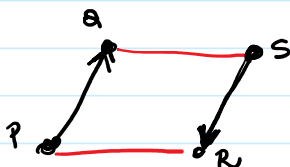
$$(2\overrightarrow{PQ} + 3\overrightarrow{SR}) \text{ och } (3\overrightarrow{RS} - \overrightarrow{QS})$$

$$b i) \ 2\overrightarrow{PQ} + 3\overrightarrow{SR} = 2(-3, -2, 4) + 3(3, 2, -4) = \\ = 2(-3, -2, 4) - 3(-3, -2, 4) = \\ = (2-3)(-3, -2, 4) = \\ = (-1)(-3, -2, 4) = + (3, 2, -4)$$

$$\text{Då} \quad 2\overrightarrow{PQ} + 3\overrightarrow{SR} = 1\overrightarrow{SR}$$

$$b ii) \ 3\overrightarrow{RS} - \overrightarrow{QS} = (-9, -6, 12) - (4, 5, 2) = (-13, -11, 10)$$

c) Motivera att de fyra punkterna är hörn i en parallelogram



$$\overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{SR}$$

$$\overrightarrow{QS} \parallel \overrightarrow{RP}$$

$$\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{SR}$$

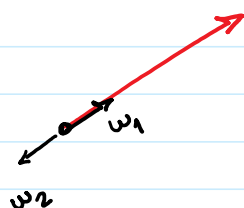
Då är punkterna hörn i en parallelogram med volym 0.

$$\parallel \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{QS} \parallel$$

Ärsnitt 1.5

1.10 sida 50

a) $v = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix}$ enhetsvektor $\|w\|=1$ och $w \parallel v$

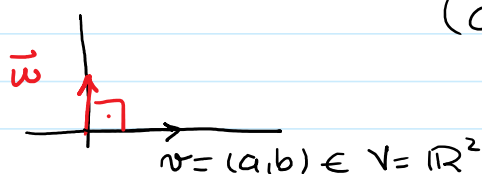


$$\text{så } w_1 = \frac{1}{\|v\|} v \quad \text{eller} \quad w_2 = -\frac{1}{\|v\|} v$$

$$\|v\| = \sqrt{5^2 + (-7)^2} = \sqrt{25+49} = \sqrt{74}$$

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{74}} (5, -7) \quad w_2 = -\frac{1}{\sqrt{74}} (5, -7)$$

b. ge två enhetsvektorer som är ortogonala mot v



$$(a, b) \cdot (x, y) = ax + by = 0$$

$$= by = -ax$$

$$= y = -\frac{a}{b} x$$

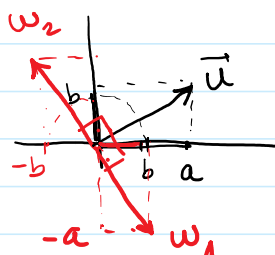
$$w \perp v \Leftrightarrow w \cdot v = 0$$

$$w = (x, y) \in V = \mathbb{R}^2$$

$$\text{Då } w = (x, -\frac{a}{b}x) =$$

$$= x(1, -\frac{a}{b}) =$$

$$w_1 = x(b, -a), \quad x \in \mathbb{R}.$$



$$\text{När } x = 1, \quad w_2 = (-b, a)$$

I $\mathbb{R}^2$ finns det 2 vektorer (w_1 och w_2) som är ortogonala mot $v = (a, b)$

$$w_1 = (-b, a)$$

$$w_2 = (b, -a)$$

c) $w = ?$ $w \parallel v$ & $\|w\|=2$
parallell
samma riktning.

parallell
samma riktning.

$$v = (5, -7) \quad \hat{v} = \frac{v}{\|v\|} = \frac{1}{\sqrt{25+49}} (5, -7) = \text{enhetsvektor}$$

$$w \parallel v \parallel \hat{v} \Rightarrow \begin{cases} w \parallel \hat{v} \\ \|\hat{v}\| = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{w = 2 \cdot \hat{v}}$$

$$\text{Då } \|w\| = \|2\hat{v}\| = 2\|\hat{v}\| = 2 \cdot 1 = 2$$

1.11 Det är samma idé, men $V = \mathbb{R}^3$
Så här har vi mer möjligheter: (frihet)
och då kan vi ha mer fria parameter.

$$a) v = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = (1, 4, -3) \quad \|v\| = \sqrt{1^2 + 4^2 + (-3)^2} = \sqrt{1+16+9} = \sqrt{26}$$

$$\hat{v}_1 = \frac{1}{\|v\|} v = \frac{1}{\sqrt{26}} (1, 4, -3) = \left(\frac{1}{\sqrt{26}}, \frac{4}{\sqrt{26}}, -\frac{3}{\sqrt{26}} \right)$$

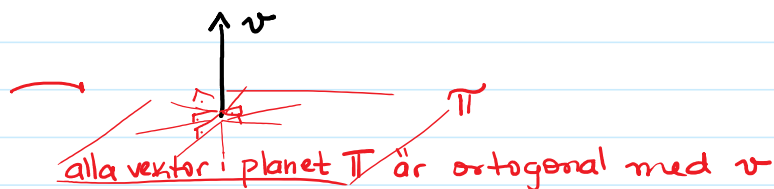
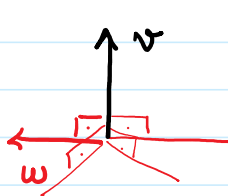
$$\hat{v}_2 = \frac{-1}{\|v\|} v = -\frac{1}{\sqrt{26}} (1, 4, -3) = \left(-\frac{1}{\sqrt{26}}, -\frac{4}{\sqrt{26}}, +\frac{3}{\sqrt{26}} \right)$$

Anmärkning. Det finns bara $\hat{v}_1$ och $\hat{v}_2$ som är enhetsvektorer parallella med v .

b) Bestäm 2 enhetsvektorer som är ortogonala med v .

$$w \perp v \iff w \cdot v = 0 \quad w = (x, y, z) \quad v = (1, 4, -3)$$

$$(x, y, z) \cdot (1, 4, -3) = 0 \Rightarrow \boxed{1x + 4y - 3z = 0} \quad \text{Planets ekvation}$$



1 ekvation $x + 4y - 3z = 0$ (3 variabler x, y, z)

$$x + 4y - 3z = 0 \Rightarrow \boxed{x = -4y + 3z}$$

$$x + 4y - 3z = 0 \Rightarrow \boxed{x = -4y + 3z}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4y + 3z \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} =$$

$$= \alpha \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ med } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ fria reella parameter.}$$

$$\alpha(y) = 1 \text{ och } \beta(z) = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{4^2+1}} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \hat{w}_1$$

$$\alpha(y) = 0 \text{ och } \beta(z) = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{9+1}} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \hat{w}_2$$

$$\alpha(y) = 1 \text{ och } \beta(z) = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\hat{w}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Då $\hat{w}_1, \hat{w}_2, \hat{w}_3$ och alla $w = \alpha \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ är
ortogonala mot $v = (1, 4, -3)$

□.

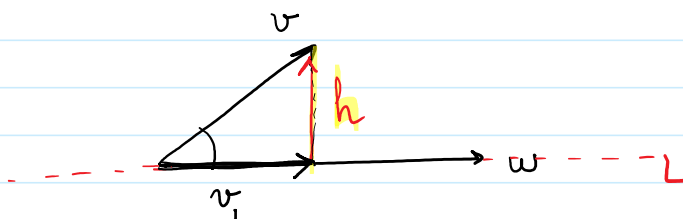
c) Samma som redan gjort för $v \in \mathbb{R}^2$.

$$1.12) \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

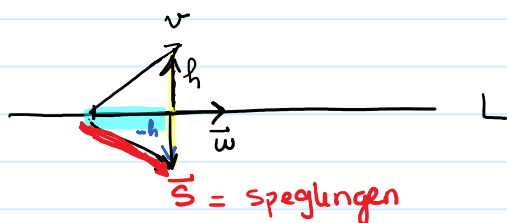
$$a) \quad v \cdot w = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 - 4 + 0 = -2$$

$$b) \quad v_L = \text{proj}_w v = \left(\frac{v \cdot w}{w \cdot w} \right) w$$

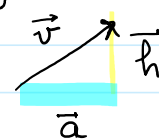
$$= \frac{-2}{4+1} (2, -1, 0) = -\frac{2}{5} (2, -1, 0) = \left(-\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, 0 \right)$$



c) Speglingen av v i en linje L med w som riktningsvektor



$$a = \text{proj}_w v$$



$$v = a + h \Rightarrow$$

$$h = v - a$$

$$a = \frac{v \cdot w}{w \cdot w} w = \left(-\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, 0\right)$$

$$h = (1, 4, -3) - \left(-\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, 0\right)$$

$$h = \left(\frac{9}{5}, \frac{18}{5}, -3\right)$$

Då

$$s = \left(-\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, 0\right) - \left(\frac{9}{5}, \frac{18}{5}, -3\right) =$$

$$s = \left(-\frac{13}{5}, -\frac{16}{5}, 3\right)$$

□

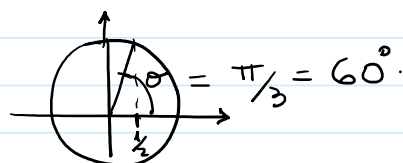
1.13 θ = vinkeln mellan u och v : Notation: $\theta = \angle(u, v)$

$$\text{Vi vet att } u \cdot v = v \cdot u = \|u\| \|v\| \cos \theta \Rightarrow$$

$$\cos \theta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|} \Rightarrow \theta = \arccos \left(\frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|} \right)$$

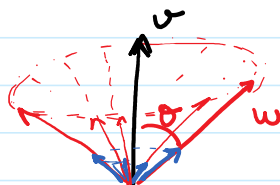
$$\text{Då. } \cos \theta = \frac{(1, 3, 2) \cdot (3, 2, -1)}{\sqrt{1+9+4} \sqrt{9+4+1}} = \frac{3+6-2}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \arccos \left(\frac{1}{2} \right)$$



1.14. $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$. Bestäm w sådan att vinkel mellan v och w är 60° .

$$60^\circ = \theta = \angle(v, w)$$



Det finns oändliga lösningar.

$$\cos 60 = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$



$$\cos 60 = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\vec{w} = (a, b, c)$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \cos \theta = \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \frac{1}{2} \quad *$$

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 1 \quad (\text{Antag det})$$

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 1 \quad \therefore a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

$$\text{Så } \vec{w} = \hat{\vec{w}} = \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|} = (a, b, c)$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{1+1+2} = \sqrt{4} = 2$$

Mål: Bestäm $\vec{w}$. Så att $\times$

$$(1, 1, \sqrt{2}) \cdot (a, b, c) = a + b + \sqrt{2}c = \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \cos \theta = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

Då har vi ett system:

$$\begin{cases} a + b + \sqrt{2}c = 1 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a = 1 - (b + \sqrt{2}c)}$$

$$(1 - (b + \sqrt{2}c))^2 + b^2 + c^2 = 1$$

$$1 - 2(b + \sqrt{2}c) + (b + \sqrt{2}c)^2 + b^2 + c^2 = 1$$

$$\cancel{1} - \cancel{2b} - \cancel{2\sqrt{2}c} + \cancel{b^2} + \cancel{2b\sqrt{2}c} + \cancel{2c^2} + \cancel{b^2} + \cancel{c^2} = \cancel{1}$$

$$2b^2 - 2b + 2b\sqrt{2}c + c^2 + 2c^2 - 2\sqrt{2}c = 0$$

$$2b(b-1) + 2\sqrt{2}c(b-1) + 3c^2 = 0$$

$$\text{Då har vi } \begin{cases} a = 1 - (b + c\sqrt{2}) \\ 2b(b-1) + 2\sqrt{2}c(b-1) + 3c^2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Om } c = 0 \Rightarrow 2b(b-1) = 0 \quad \begin{cases} 2b = 0 \Rightarrow \boxed{b = 0} \\ \text{eller} \\ b-1 = 0 \Rightarrow \boxed{b = 1} \end{cases}$$

$$1^{\text{st}}: c = 0 \text{ och } b = 0 \Rightarrow a = 1 - (0 + 0\sqrt{2}) = 1 \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

$$2^{\text{nd}}: c = 0 \text{ och } b = 1 \Rightarrow a = 1 - (1 + 0\sqrt{2}) = 1 - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 0}$$

$$\vec{w}_1 = (a, b, c) = (0, 1, 0)$$

två möjliga lösningar
(när $c = 0$)

$$\vec{w}_2 = (a, b, c) = (1, 0, 0)$$

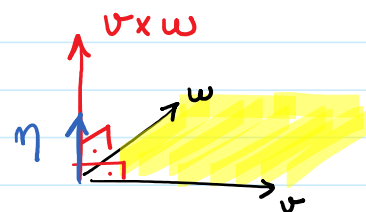
1.15 (sw) Den här uppgift är på facit on line. (kolla boken)

1.16 Låt $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ $w = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

a. $v \times w$

b. arean av  $= \|v \times w\|$

c. enhetsvektor som är normal till planet som spänns upp av v och w



$$\eta = \frac{v \times w}{\|v \times w\|} \text{ enhetsvektor}$$

a) $v \times w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$ Det är en alternativ möjlighet att räkna $v \times w$. Vi använder här determinant

$$= i \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -3i - (-6)j + (-1-8)k = (-3, +6, -9) = v \times w$$

$$v \times w = (-3, +6, -9)$$

b) $\|v \times w\| = \sqrt{9 + 36 + 81} = \sqrt{126}$

c) $\vec{\eta} = \frac{1}{\sqrt{126}} (-3, +6, -9) = \frac{3}{\sqrt{126}} (-1, 2, -3)$

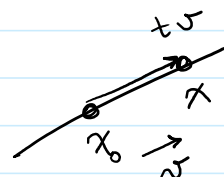
Ävsnitt 1.6 sidan 52

1.17 $L_1: \begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = -3 - 1t \\ z = 5 + 2t \end{cases}$

$$L_1: \chi = \chi_1 + t v_1$$

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$



$$L_2: \begin{cases} x = -2 - 15t \\ y = +3t \\ z = -5 - 6t \end{cases}$$

$$L_2: \chi = \chi_2 + t v_2$$

för L_2 $t \neq t$ för L_1

$$\chi_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

för L_2 $t \neq$ u $w = -1$

$$L_3: \begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = -3 + t \\ z = 5 + 2t \end{cases}$$

$$L_3: X = X_3 + t v_3$$

$$X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$L_3: \begin{cases} x = -3 + 10t \\ y = -2 - 2t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$$

$$L_4: X = X_4 + t v_4$$

$$X_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Då har vi:

• $v_2 = (-15, 3, -6) = -3(5, -1, 2) \quad \therefore L_2 \parallel L_1$ parallell. ($v_2 = \alpha v_1$)
 $\alpha = -3$

• $v_3 = (-5, 1, 2) \neq \alpha v_1 \quad L_3 \not\parallel L_1, L_2$ (L_3 ej parallell med L_1 och L_2)

• $v_4 = (10, -2, 4) = 2(5, -1, 2) \quad L_4 \parallel L_1 \parallel L_2$

? $X_4 \in L_1$? Finns det $t \in \mathbb{R}$ sådant att

$$X_4 - X_1 = t v_1 ?$$

$$? \begin{pmatrix} -3 - 2 \\ -2 + 3 \\ 3 - 5 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} ?$$

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{t = -1} \Rightarrow \text{Ja, alla punkter of } L_4 \text{ är också punkter of } L_1$$

$$L_4 \parallel L_1 \text{ och } L_1 \cap L_4 = L_4 = L_1 \text{ (de är samma linje)}$$

↑ deras intersection

? $L_2 \cap L_1 = L_2 = L_1$? Är de samma linje?

$$? X_2 - X_1 = t v_1 ?$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ +3 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -10 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

? finns det t ?

$$? -2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} ? \text{ Nej!}$$

$$? t = -\frac{4}{5} = -6 = 5 ??$$

Nej, det går inte.

$$\begin{aligned} -4 &= 5t \Rightarrow t = -4/5 \\ 6 &= -t \Rightarrow t = -6 \\ 10 &= 2t \Rightarrow t = 5 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} ?? \\ ??? \end{array}$$

Då $L_1 \parallel L_2$ men L_1 och L_2 har inga intersection

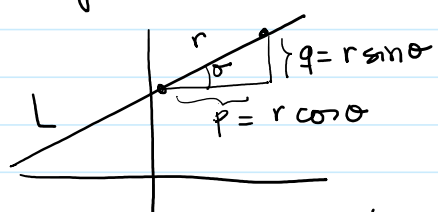
$$L_1 \cap L_2 = \emptyset \text{ (tomt)}$$

1.18 $P_1 = (1, 2)$ $P_2 = (5, -1)$

§16.1 • $y = kx + m$ $k \in \mathbb{R}$

linje i planet.

med vinkel θ och $\tan \theta = k$



$$k = \frac{q}{p} = \frac{r \sin \theta}{r \cos \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$$



$x = \alpha$, för ett bestämt värde $\alpha \in \mathbb{R}$.

Normal form: $Ax + By + C = 0 \Rightarrow$

$$By = -Ax - C \Rightarrow$$

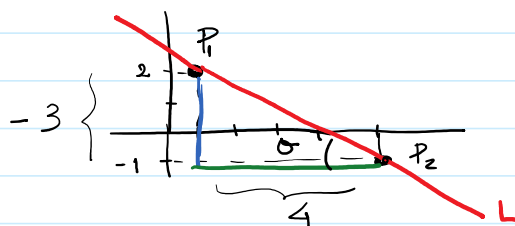
$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \quad (y = kx + m)$$

$$k = -\frac{A}{B} \quad m = -\frac{C}{B}$$

Då har vi

$$P_1 = (1, 2)$$

$$P_2 = (5, -1)$$



$$k = \frac{-1 - 2}{5 - 1} = \frac{-3}{4}$$

$$(y - y_0) = k(x - x_0), \text{ Här } (x_0, y_0) = P_1 \text{ eller } P_2.$$

$$y = kx + y_0 - kx_0$$

$$\boxed{y = kx + m}$$

$$(y - 2) = -\frac{3}{4}(x - 1)$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{4} + 2$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{11}{4} \Rightarrow 4y + 3x - 11 = 0 \Rightarrow \boxed{3x + 4y - 11 = 0}$$

Normal form.

b) Parameter form:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} \quad v = P_2 - P_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$X = P_1 + t v \Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}}, \lambda \in \mathbb{R}$$

parameter

Bara en anmärkning: Från parameter form kan man också komma till normal form.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = 2 - 3\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda = \frac{x-1}{4} \\ \lambda = \frac{y-2}{-3} \end{matrix} > \frac{y-2}{-3} = \frac{x-1}{4} \Rightarrow$$

$$\boxed{y - 2 = -\frac{3}{4}(x - 1)}$$

i) $4(y - 2) = -3(x - 1)$

$$4y - 8 + 3x - 3 = 0$$

$$\boxed{3x + 4y - 11 = 0}$$

normal form

ii) $y = -\frac{3}{4}(x - 1) + 2$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{4} + 2$$

$$\boxed{y = -\frac{3}{4}x + \frac{11}{4}}$$

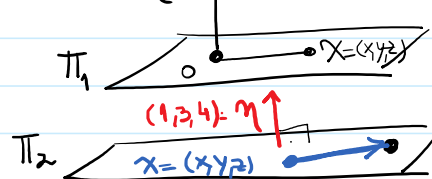
$y = kx + m$ form.

1.19. Samma idé.

1.20 Samma idé.

- 1.21. $\left\{ \begin{array}{l} \text{Planet } \Pi_1: x + 3y + 4z + 7 = 0 \\ \text{Planet } \Pi_2 // \Pi_1 \quad \Pi_2 \text{ innehåller punkten } (2, -2, 2) \\ \text{Bestäm ekvationen av } \Pi_2 \text{ på normalform.} \end{array} \right.$

$$(1, 3, 4) = \vec{\eta}$$



$$\vec{OX} \cdot \vec{\eta} = 0 \quad \vec{\eta} \text{ är normalvektor av } \Pi_1$$

$$\Pi_1 // \Pi_2 \quad (\Pi_1 \text{ parallell med } \Pi_2)$$

Då $\vec{\eta}$ är också normalvektor av Π_2 .

Det betyder att $\vec{\eta}$ är ortogonal till varje vektor som är på planet Π_2 .

$X = (x, y, z)$ punkt av Π_2 $P = (2, -2, 2)$ punkt av Π_2 .

$$PX = \text{vektor av } \Pi_2 \quad PX = X - P = (x - 2, y + 2, z - 2)$$

$$\text{Då } PX \cdot \vec{\eta} = 0 \Rightarrow (x - 2, y + 2, z - 2) \cdot (1, 3, 4) = 0 \Rightarrow$$

$$1x + 3y + 4z - (2 \cdot 1 - 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4) = 0$$

$$x + 3y + 4z - (2 - 6 + 8) = 0$$

$$\boxed{x + 3y + 4z - 4 = 0}$$

Ekvation normal av Π_2 .

$$1.22. \left\{ \begin{array}{l} \Pi: 1x + 3y + 4z - 7 = 0 \end{array} \right.$$

Bestäm ekvation för Π på parameterform.

Svar: 1 ekvation med 3 variabler $\Rightarrow$ 2 variabler måste vara fria.

$$\boxed{x = -3y - 4z + 7} \quad \text{med } y \text{ och } z \text{ fria}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 - 3y - 4z \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{y = \alpha \quad \alpha \in \mathbb{R}} + \underbrace{\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{z = \beta \quad \beta \in \mathbb{R}}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 7 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} -3 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} -4 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

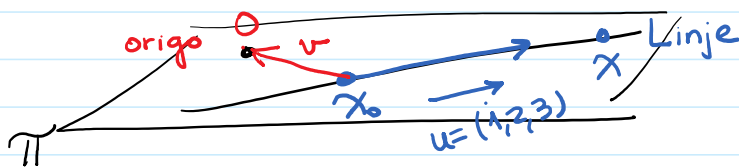
$\vec{z} = \beta \quad \beta \in \mathbb{R}$

1.23 Bestäm en ekvation på normalform för planet Π genom origo och Π som innehåller linjen $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 2+2t \\ z = 3+3t \end{cases}$

Svar : • Normal form betyder att vi behöver $\eta \equiv$ normalvektor av Π .

• Att bestäma η

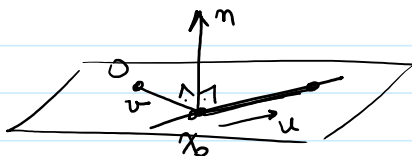
en möjlighet är $\eta = u \times v$ med u och v 2 vektorer i planet Π .



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{x_0} + t \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_u$$

$$v = O x_0 = x_0 - O = (2-0, 2-0, 3-0) = (2, 2, 3)$$

• $\eta = u \times v$



$$u = O x_0$$

$$v = (1, 2, 3)$$

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$i \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

determinant

$$i(2 \cdot 3 - 2 \cdot 3) - j(2 \cdot 3 - 1 \cdot 3) + k(2 \cdot 2 - 1 \cdot 2) =$$

$$0 \cdot i - 3j + 2k = (0, -3, 2) = \eta$$

• $\Pi: ((x, y, z) - (0, 0, 0)) \cdot (0, -3, 2) = 0$

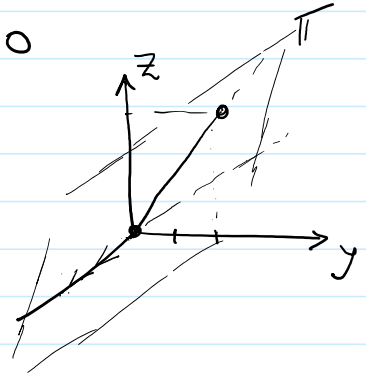
$$\bullet \quad \Pi: ((xyz) - (0,0,0)) \cdot (0, -3, 2) = 0$$

$$0 \cdot x - 3y + 2z = 0$$

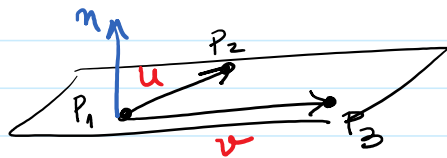
$$2z = 3y$$

$$z = \frac{3}{2}y$$

$$\begin{cases} -3y + 2z = 0 \\ x \text{ free} \end{cases}$$



1.24. Bestäm en ekvation på normal form för Π
 Π = planet som innehåller punkterna P_1, P_2, P_3
 $P_1 = (1, 2, 3)$, $P_2 = (4, 5, 6)$, $P_3 = (0, 1, 3)$



$$u = P_2 - P_1 = (3, 3, 3)$$

$$v = P_3 - P_1 = (-1, -1, 0)$$

$$\eta = u \times v$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \eta =$$

$$i \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$i(3 \cdot 0 - 3 \cdot (-1)) - j(3 \cdot 0 - 3 \cdot (-1)) + k(-3 + 3)$$

$$i(3) - j(3) + k(0) = \underline{\underline{(3, -3, 0)}}$$

Då Π

$$(P_1 X) \cdot \eta = 0$$

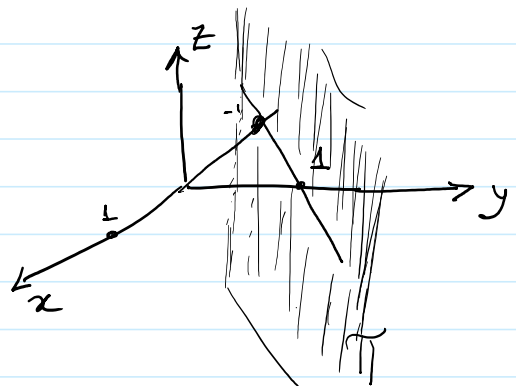
$$(x-1, y-2, z-3) \cdot (3, -3, 0) = 0 \Rightarrow$$

$$3(x-1) - 3(y-2) + 0(z-3) = 0$$

$$3x - 3y - 3 + 6 = 0$$

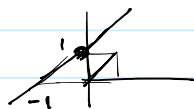
$$\begin{cases} 3x - 3y + 3 = 0 \\ z \text{ free} \end{cases}$$

$$3x - 3y + 3 = 0$$



$$3y = 3x + 3$$

$$y = x + 1$$



1.25 Svar på facit on line.

1.26 Svar på facit on line

1.27 Svar på facit on line

1.28 Bestäm avståndet mellan planen

$$\pi_1: 2y + 4x + 8z = 28$$

$$\pi_2: 2x + y + 4z + 3 = 0$$

Svar $\pi_1: \frac{4x}{2} + \frac{2y}{2} + \frac{8z}{2} = \frac{28}{2} \Rightarrow 2x + y + 4z = 14$

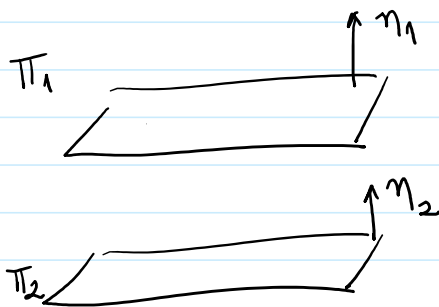
$$\eta_1 = (2, 1, 4)$$

$$\pi_2: 2x + y + 4z = -3 \Rightarrow \eta_2 = (2, 1, 4)$$

$$\eta_1 \parallel \eta_2$$



$$\pi_1 \parallel \pi_2$$



Bestäm nu $P_1 \in \pi_1$
punkt i π_1

$$P_1 \in \pi_1 \Rightarrow x=0, y=0 \Rightarrow 2(0) + 0 + 4z = 14 \Rightarrow z = \frac{14}{4}$$

$$P_1 = (0, 0, \frac{14}{4})$$

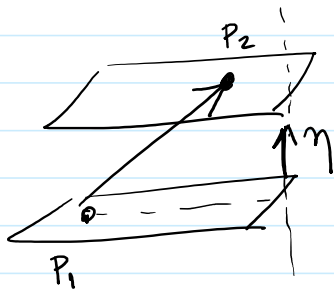
$$P_1 \in \pi_2 = ?$$

$$2x + y + 4z = -3$$

$$2(0) + 0 + 4(\frac{14}{4}) = -3 \Rightarrow \boxed{14 = -3} ???$$

Nej; $P_1 \notin \pi_2$

Då räknar vi $\overline{P_1 P_2}$, med $P_2 \in \pi_2$ och $P_1 \in \pi_1$



$$P_2 \in \Pi_2 \Rightarrow x=0, y=0 \Rightarrow 0+0+4z=-3 \\ z=-3/4$$

$$P_2 = (0, 0, -3/4)$$

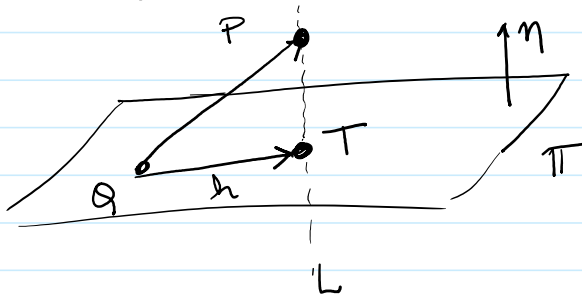
$$P_1 P_2 = P_2 - P_1 = (0, 0, -3/4) - (0, 0, 1/4) = (0, 0, -1/4)$$

$$d(\Pi_1, \Pi_2) = \left\| \text{proj}_{\eta} \overrightarrow{P_1 P_2} \right\| = \frac{|\overrightarrow{P_1 P_2} \cdot \eta|}{\|\eta\|^2} \|\eta\| = \frac{|\overrightarrow{P_1 P_2} \cdot \eta|}{\|\eta\|}$$

$$= \frac{|(0, 0, -1/4) \cdot (1, 2, 3)|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot \frac{51}{4} = \frac{51}{4\sqrt{14}}$$

1.29 (sw) Svar på facit online

Projektion av Punkten $P=(1,1,1)$ på planet



$$Q \in \Pi$$

$$P \notin \Pi$$

$T \equiv$ det är punkten
som vi vill.

L : linje med riktningsvektor $= \eta$
och P tillhör L .

$$L \cap \Pi = T \quad \text{Så behöver man}$$

$$1) \text{ hitta } L \text{ ekvation } X = X_0 + \alpha \eta$$

2) ersätta L ekvation i den Π ekvation.
då bestäm man α och därefter
punkten T .

Blandat Kap 1 14, 23, 39, 42

1.39 sidan 54: Vektorer x och y k: $\|x\| = \|y\|$ (samma längd)

$$\alpha = \angle(x, y) \text{ sådant } \cos \alpha = \frac{1}{3} \quad \left(\left(\frac{1}{3} \right)^2 + \sin^2 \alpha = 1 \right)$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{9}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{8}}{3}$$

$$x \cdot y = \|x\| \|y\| \cos \alpha \quad \therefore \boxed{x \cdot y = k^2 \cdot \frac{1}{3}}$$

$$\begin{cases} u = ax + by \\ v = cx + dy \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ linjära kombinationer av } x \text{ och } y. \\ a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ (reella tal)} \end{array} \right.$$

a) Beräkna vinkel mellan u och v .

b) Exempel på konstanter $a, b, c, d \neq 0$ och $u \perp v$ $\theta = \angle(u, v) = 90^\circ$

Svar:

$$a) \quad \vec{u} = a\vec{x} + b\vec{y} \quad \vec{v} = c\vec{x} + d\vec{y}$$

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta & \theta = \angle(u, v) \quad (\alpha = \angle(x, y)) \\ \vec{u} \cdot \vec{v} = (a\vec{x} + b\vec{y}) \cdot (c\vec{x} + d\vec{y}) = \end{cases}$$

$$acx \cdot x + adx \cdot y + bcy \cdot x + bdy \cdot y =$$

$$ac\|x\|^2 + (ad+bc)x \cdot y + bd\|y\|^2 =$$

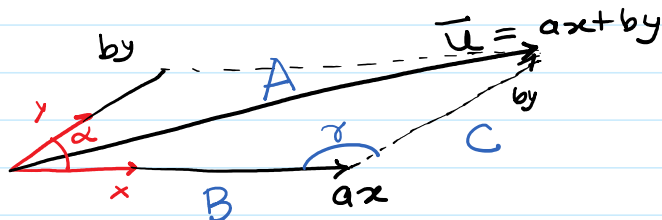
$$ac k^2 + (ad+bc) k^2 \cos \alpha + bd k^2 =$$

$$k^2 [(ac+bd) + (ad+bc) \cos \alpha] \quad (\cos \alpha = \frac{1}{3})$$

Att beräkna vinkel θ mellan u och v
behöver vi beräkna $\|u\|$ och $\|v\|$ så att

$$\cos \theta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|} = \frac{k^2 [(ac+bd) + \frac{1}{3}(ad+bc)]}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

Så:



$$\begin{aligned} A &= \|u\| \\ B &= \|ax\| \\ C &= \|by\| \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{cosine laggen} \\ A^2 = B^2 + C^2 - 2BC \cos(\theta) \end{array} \right.$$

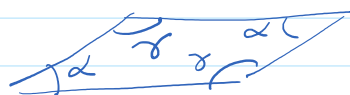


$$2\theta + 2\alpha = 360$$

$$u = \|ax\|$$

$$C = \|by\|$$

cosine laggen



$$2\gamma + 2\alpha = 360$$

$$\gamma + \alpha = 180 = \pi$$

$$\gamma = \pi - \alpha \quad \otimes$$

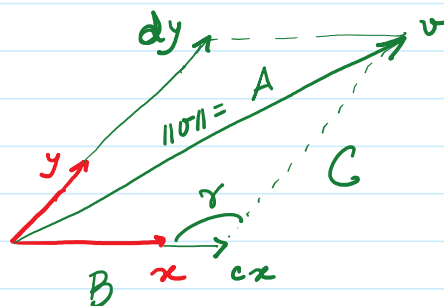
$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

Då $\|u\|^2 = \|ax\|^2 + \|by\|^2 - 2\|ax\|\|by\|\cos(\pi - \alpha)$

$$\|u\|^2 = a^2\|x\|^2 + b^2\|y\|^2 - 2 \cdot a \cdot b \|x\| \cdot \|y\| \left(-\frac{1}{3}\right) \quad \|x\| = \|y\| = k$$

$$\|u\|^2 = a^2 \cdot k^2 + b^2 k^2 + \frac{2 \cdot a \cdot b \cdot k^2}{3}$$

$$\|u\| = k \sqrt{a^2 + b^2 + \frac{2}{3} a \cdot b}$$



$\|v\|$ igen använda Cosinilaggen

$$\|v\|^2 = c^2 k^2 + d^2 k^2 + \frac{2}{3} c d k^2$$

$$\|v\| = k \sqrt{c^2 + d^2 + \frac{2}{3} c \cdot d}$$

Då $\cos \theta = \frac{k^2 \left[(ac + bd) + \frac{1}{3}(ad + bc) \right]}{k \sqrt{a^2 + b^2 + \frac{2}{3} a \cdot b} \cdot k \sqrt{c^2 + d^2 + \frac{2}{3} c \cdot d}}$

$$\theta = \angle(u, v)$$

$$\cos \theta = \frac{(ac + bd) + \frac{1}{3}(ad + bc)}{\sqrt{a^2 + b^2 + \frac{2}{3} a \cdot b} \cdot \sqrt{c^2 + d^2 + \frac{2}{3} c \cdot d}}$$

i) $\cos \theta = 0$ ($u \perp v$) därmed

$$(ac + bd) + \frac{1}{3}(ad + bc) = 0 \Leftrightarrow$$

$$ac + bd = -\frac{1}{3}(ad + bc) \Leftrightarrow$$

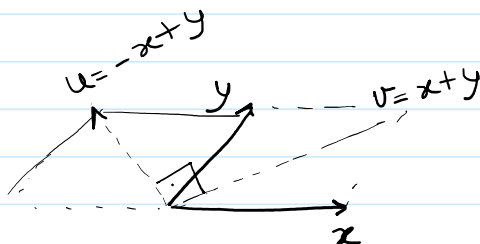
$$a\left(c - \frac{1}{3}d\right) + b\left(d - \frac{1}{3}c\right) = 0$$

$$a(3c - d) + b(3d - c) = 0$$

$$a = \frac{b(c-3d)}{(3c-d)}$$

$$3c-d \neq 0$$

då: $b=1, c=1, d=1 \Rightarrow a = \frac{1(1-3)}{(3-1)} = \frac{-2}{2} = -1$



Ett exempel

1.42. Sidan 55.

För vilka vektorer u och v i rummet $(\mathbb{R}^3)$ gäller att

i) $(u \times v) \times (u \times v) = 0$

ii) $(u \times v) \times u \times v = 0$

i) $u \times v = w \Rightarrow w \times w = \vec{0}$

Då för alla $u, v \in \mathbb{R}^2$ ska vi ha $(u \times v) \times (u \times v) = 0$

Obs: $w = (a, b, c)$

$$w \times w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} b & c \\ b & c \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} a & c \\ a & c \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} =$$

$$= i(bc - bc) - j(ac - ac) + k(ab - ab) =$$

$$= 0i - 0j + 0k = (0, 0, 0)$$

Convention

$$i \rightarrow e_x$$

$$j \rightarrow e_y$$

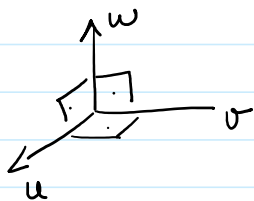
$$k \rightarrow e_z$$

ii) $w = u \times v \Rightarrow w \perp u$ och $w \perp v$

$$w \times u = \vec{k} \quad \text{med} \quad k \perp \vec{w} \quad \text{och} \quad k \perp u$$

Obs: Men vi har bara 3 ortogonala riktningar...

a) Om



Om
 $u \perp v$ (u och v är ortogonala)

$\hookrightarrow w \perp u$ och $w \perp v$

$$\text{Då } ((u \times v) \times u) \times v \\ \underbrace{(w \times u)}_K \times v$$

$\hookrightarrow$ men K måste vara parallell med v .

$$K = \alpha v$$

$$\text{Men då } (\alpha v) \times (v) = \alpha (v \times v) = 0$$

b) Om på början $u \parallel v$ $u \times v = 0$

$$\text{då } ((u \times v) \times u) \times v = ((0) \times u) \times v = (0) \times v = 0$$

Lycka till! ☺