

Kapitel 3 Mål: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Aversnitt} \\ 3.5 - 37 \end{array} \right.$

- $f \circ g \neq g \circ f$
- exempel $\rightarrow$ Rotation i rummet
- Area & Volym
- Translation $\leftarrow$ ej linjär avbildning *

Proposition 3.22 (sidan 98)

(Hypotes.) $\left[\begin{array}{l} f: V \rightarrow V, \text{ linjär med } A \text{ matris} \\ g: V \rightarrow V, \text{ linjär med } B \text{ som matris} \end{array} \right.$

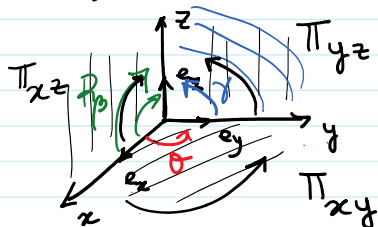
Dä (Tes) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Sammansättningar } f \circ g \text{ och } g \circ f \\ \rightarrow \text{ är linjär} \\ \rightarrow (f \circ g)(x) = (AB)x \quad \checkmark \\ \rightarrow (g \circ f)(x) = (BA)x \quad \checkmark \end{array} \right.$

Beris

$$(f \circ g)(x) = \overset{\text{definition}}{f(g(x))} = A(g(x)) = A(Bx) = (AB)x \quad \text{det är linjär}$$

$$(g \circ f)(x) = \overset{\text{linjär}}{g(f(x))} = B(f(x)) = B(Ax) = (BA)x \quad \text{linjär}$$

Exempel 1) Rotation α moturs i Rummet ($\mathbb{R}^3$)



$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_{xy} \\ z=0 \end{array} \right. \quad \vec{n} = e_z = (0, 0, 1) \quad (x, y, z) \cdot (0, 0, 1) = 0x + 0y + 1z = 0$$

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

$$R_\psi = \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & -\sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix}$$

1. $\mapsto p$ 0 $\mapsto p$ 1

$$R_\alpha = R_\beta \circ R_\gamma \circ R_\delta \quad \text{Rotation in } \mathbb{R}^3.$$

2) $\underbrace{f \circ g \neq g \circ f}_{\text{in general}} \quad (f \circ g = g \circ f \text{ for some special examples})$

Proposition 3.26 sidan 100

$f: V \rightarrow W$ linjär, med matris A
 $x \mapsto f(x) = Ax$

$$\left[f \text{ är inverterbar} \right] \iff \text{OM OCH ENDA OM} \left[\begin{array}{l} A \text{ är inverterbar} \\ \text{då} \\ f^{-1}: W \rightarrow V \text{ linjär} \\ \text{med } A^{-1} \text{ som matris} \end{array} \right]$$

Hipotesis thesis

Basis: 1) $[p] \Rightarrow [q]$

2) $[q] \Rightarrow [p]$

1) $(p) = f \text{ är inverterbar} \therefore \text{det finns } \underline{f^{-1}}$

$(q) = A \text{ är inverterbar}$

Strategy: $\left\{ \begin{array}{l} \text{a) visa att } \underline{f^{-1} \text{ är linjär}} \therefore \text{det finns en} \\ \text{b) visa att matrisen är } A^{-1} \end{array} \right.$ matris för } f^{-1}

a) $w_1, w_2 \in W = (\text{värdemängde})$

Det finns $v_1 \in V$, $\underline{f(v_1) = w_1}$, $f(v_2) = w_2$

$$\rightarrow \underline{f^{-1}(w_1 + w_2)} = f^{-1}(\underbrace{f(v_1) + f(v_2)}_{f \text{ är linjär}}) = \underbrace{f^{-1}(f(v_1 + v_2))}_{f^{-1} \text{ är inverterbar}} =$$

$$= I(v_1 + v_2) = v_1 + v_2 = \underline{f(w_1) + f(w_2)}$$

$k = \text{konstant} \in \mathbb{R}$

$$\rightarrow \underline{f^{-1}(kw_1)} = f^{-1}(k \underline{f(v_1)}) = \underline{f^{-1}(f(kv_1))} = I(\underline{kv_1}) =$$

$$= \underline{k f(w_1)}$$

Så är f^{-1} linjär.

Då f^{-1} har en matris B

om

Da f^{-1} har en matris B

? Vi vill visa att $B = \underline{A^{-1}}$. Om
 $\begin{cases} B \cdot A = I \\ A \cdot B = I \end{cases} \Rightarrow \boxed{B = A^{-1}}$

• $u = f^{-1}(w) = B(w) = B(Au) = (BA)u$
 $\boxed{I = BA}$

• $w = f(u) = f(f^{-1}(w)) = A(B(w)) = (AB)w$
 $\boxed{I = (AB)}$

Det betyder att $\boxed{B = A^{-1}}$

2) $[q] \Rightarrow [p]$

$[q]$ A är inverterbar $\Rightarrow$ Det finns $\underline{A^{-1}}$

$A^{-1} \cdot u$ det är en linjär avbildning.

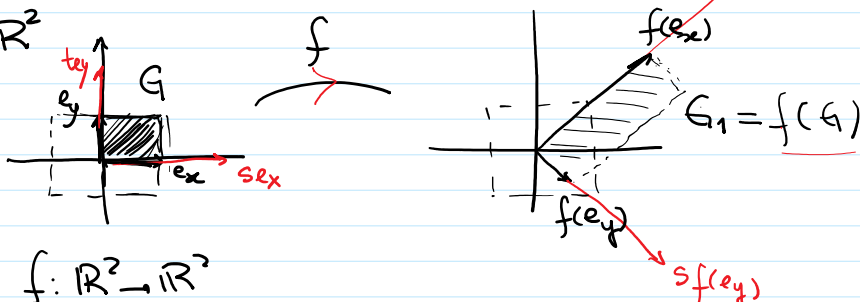
$A \cdot A^{-1} = I \rightarrow f \circ f^{-1} \rightarrow f$ är inverterbar.
 $A^{-1} \cdot A = I \rightarrow f^{-1} \circ f$

§ 3.6 Area & Volym.

(planet)
 $\mathbb{R}^2$

(Rummet)
 $\mathbb{R}^3$

Example $\mathbb{R}^2$



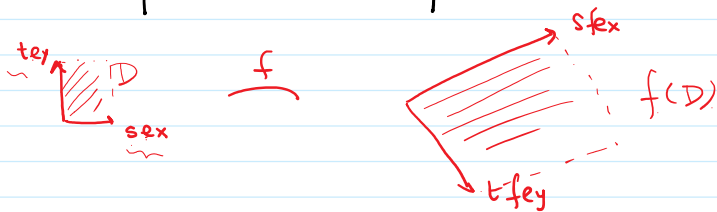
Sats:
3.11

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} f(e_x) & f(e_y) \end{pmatrix}}_{\text{Matris } A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\text{Area } G = \left| \det \begin{bmatrix} e_x & e_y \end{bmatrix} \right| = 1$

$\text{Area } G_1 = \left| \det \begin{bmatrix} f(e_x) & f(e_y) \end{bmatrix} \right| = |\det(A)|$

$$\text{Area } G_1 = \left| \det \begin{bmatrix} f(x_1) & f(y_1) \end{bmatrix} \right| = |\det(A)|$$



$$A' = \begin{pmatrix} sfex & tfey \end{pmatrix}$$

$$\det A' = |sfex \ tfey| = \cancel{st} \det A$$

$$\frac{\text{Area } f(D)}{\text{Area } (D)} = \frac{|\det A'|}{\cancel{st}} = \frac{\cancel{st} |\det A|}{\cancel{st}} = |\det A|$$

$$\text{Area } f(D) = |\det A| \cdot \text{Area}(D)$$

$$A = \begin{pmatrix} f_{ex} & f_{ey} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\text{Area } f(D)}{\text{Area } (D)} = |\det A|$$

Sats 3.29

(Hypotesis): $\left[\begin{array}{l} D = \text{region (områdel) i planet} \\ f(D) = \text{bilden av } D \text{ under } f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, A \text{ matris} \\ \text{linjär} \end{array} \right.$

$$\text{(Thesis)} \left[\frac{\text{area}(f(D))}{\text{area}(D)} = |\det(A)| \right]$$

Exempel:

1) $M =$ matrisen för rotation β radianer moturs

$$M = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \quad \det M = \cos^2 \beta + \sin^2 \beta = 1$$

M förändrar inte area.

2) $B =$ skalning med faktorn s

$$B = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \quad \det B = \begin{vmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{vmatrix} = s^2 - 0 = \underline{s^2}$$

"Areaskalan = kvadraten av längdskalan"

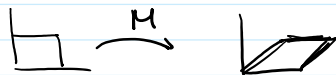
3) $A =$ spridningsmatris

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \det A = \underbrace{ad - bc} \neq 1$$

does not keep the area.

4) $M =$ skjuvning vilken α i horisontal

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \tan \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

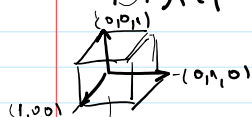


$$\det M = 1 \quad \text{keeping the area}$$

Volym : $f: V \rightarrow V = \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$B = \{e_x, e_y, e_z\}$

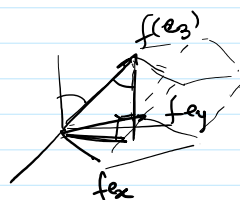


$$V_D = 1$$

D

$$A = \begin{pmatrix} | & | & | \\ f(e_x) & f(e_y) & f(e_z) \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\text{volym } f(D)} = \det A$$



$$f(D) \Rightarrow |f(e_x) \cdot f(e_y) \cdot f(e_z)| = \|f(e_x)\| \|f(e_y)\| \|f(e_z)\| \cos \alpha$$

$$f(D) = f(e_x) \times f(e_y) \cdot f(e_z) = \text{Volym}$$

fig 2.4 sidan 75

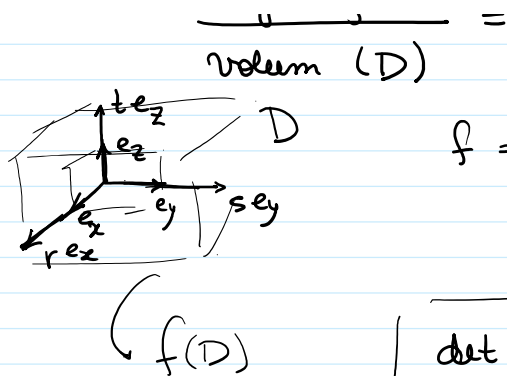
Def 2.26 $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$ sidan 73

$$\begin{aligned} \det A = & x_1 \underbrace{(y_2 z_3 - y_3 z_2)}_{\det \begin{bmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{bmatrix}} - x_2 \underbrace{(y_1 z_3 - y_3 z_1)}_{\det \begin{bmatrix} y_1 & y_3 \\ z_1 & z_3 \end{bmatrix}} + \\ & + x_3 \underbrace{(y_1 z_2 - y_2 z_1)}_{\det \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{bmatrix}} \end{aligned}$$

$$|\det(A)| = \text{volym}(D)$$

Så: $\frac{\text{volym } f(D)}{\text{volym}(D)} =$

utan



$$f = A' = (f(re_x) \ f(se_y) \ f(te_z))$$

$$A' = (r f(re_x) \ s f(se_y) \ t f(te_z))$$

$$\boxed{\det A' = rst \det A}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{volym } f(D) \\ \text{volym } (D) \end{array} \right. = \frac{rst |\det(A)|}{rst} = |\det(A)|$$

$$\boxed{\text{volym } f(D) = |\det A| \cdot \text{volym } D}$$

Sats: 3.31 (side 104) ↗

Important Result: (side 104)

A, B matrisen $n \times n$ ($n=2, n=3$)

$$|\det(A \cdot B)| = |\det A| \cdot |\det B| \quad \begin{array}{l} \text{(volym or} \\ \text{area)} \end{array}$$

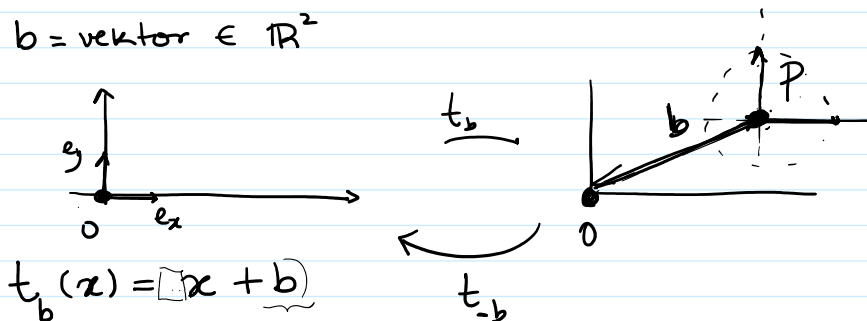
Obs $\boxed{\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B}$ (is also valid)

Dem pag 104

§3.7 Affina Avbildningar.

Translation by a fixed value

Ex. $b = \text{vektor} \in \mathbb{R}^2$



This is no longer linear.

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$\int t_b(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2) + \underline{\underline{b}} \quad \leftarrow \text{not linear}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t_b(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2) + \underline{\underline{b}} \\ t_b(x_1) = x_1 + b \\ t_b(x_2) = x_2 + b \end{array} \right\} \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} t_b(x_1) + t_b(x_2) = (x_1 + b) + (x_2 + b) \\ = (x_1 + x_2) + \underline{\underline{2b}} \end{array}$$

$$\boxed{t_{-b}(y) = y - b}$$

$$t_{-b}(t_b(x)) = t_b(x) - b = (x + b) - b$$

Def 3.35 (sidan 106)

En affin avbildning f är en sammansättning
 $f = t_b \circ g_A$ av en linjär avbildning g_A och
 och en translation t_b

$$f(x) = t_b(g_A(x)) = \underbrace{g_A(x)}_{Ax} + \underline{\underline{b}} = \underline{\underline{Ax + b}}$$

Prop 3.36 [Sammansättning av 2 affina avbildningar
 är en affin avbildning.]

$$f(x) = Ax + b \quad \text{affin} \quad A \text{ matris} \quad b = \text{vektor (fixed)}$$

$$g(x) = Cx + d \quad \text{affin} \quad C \text{ matris} \quad d = \text{vektor}$$

$$\begin{aligned} \bullet) f(g(x)) &= A(g(x)) + b = A(Cx + d) + b = \\ &= (AC)x + (Ad + b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet) g(f(x)) &= C(f(x)) + d \\ &= C(Ax + b) + d \\ &= \underline{\underline{CA}}x + \underline{\underline{Cb + d}} \end{aligned}$$

Ex 3.37: f : Roterar punkten i planet $\frac{\pi}{2}$ radianer moturs
 Kring punkten $C = (1, 0)$

Vi vill se det som en sammansättning

$$f = t_b \circ R_\theta \circ \underline{\underline{t_{-b}}} \quad R_\theta = Ax = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (x)$$



τ b $\sim$ $\underbrace{-b}$

$\sim$

$1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1$

