

Sammanfattning föreläsning 10, Linjär algebra IT, VT2021

Om vi har ett överbestämt ekvationssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ så är längden av residualvektorn $\mathbf{r}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} - \mathbf{b}$ minimal om $\mathbf{x}$ satisfierar normalekvationen

$$(A^t A)\mathbf{x} = A^t \mathbf{b}.$$

En sådan vektor $\mathbf{x}$ kallas för en minstakvadratlösning.

En *determinant* är en funktion som till varje kvadratisk matris A ordnar ett tal $\det A$ med följande egenskaper:

1. Determinanten är en linjär avbildning av varje rad.
2. Om två rader är lika så är determinanten noll.
3. Determinanten av identitetsmatrisen är ett.

Antag att vi gör en elementär radoperation på en matris A och får en matris B . Då gäller att om radoperationen är

- byte av två rader så är $\det B = -\det A$.
- multiplikation av rad med ett tal k så är $\det B = k \cdot \det A$
- addition av multipel av rad till annan rad så är $\det B = \det A$.

Antag att A är en övertriangulär eller undertriangulär matris med diagonalelement a_{ii} . Då gäller att $\det A = \prod_{i=1}^n a_{ii}$.

Det finns en unik determinant för $n \times n$ -matriser och den ges av

$$\det A = \sum_{\pi \in S_n} \epsilon(\pi) a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)},$$

där S_n är mängden av permutationer av $\{1, 2, \dots, n\}$ och $\epsilon(\pi)$ är 1 eller -1 beroende på om π är jämn eller udda.

För alla matriser gäller

- $\det(A) = \det(A^t)$,
- $\det(AB) = \det(A) \det(B)$,
- $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$, om A är inverterbar.