

Sammanfattning föreläsning 11, Linjär algebra IT, VT2021

Vektorerna $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ är linjärt oberoende om enda lösningen till

$$\sum_{i=1}^n x_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

är den triviala lösningen $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Om de inte är linjärt oberoende så säger vi att de är linjärt beroende.

Vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ är linjärt beroende om och endast om en av dem kan uttryckas som en linjärkombination av de andra.

Vektorerna $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ säges utgöra en bas för V om varje vektor $\mathbf{v} \in V$ kan skrivas som en unik linjärkombination av vektorerna $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$. Om $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ är en bas och

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{v}_i$$

så säger vi att $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ är $\mathbf{v}$:s koordinater i basen $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$.

En mängd n -vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ utgör en bas för $\mathbb{R}^n$ om och endast om $r = n$ och de är linjärt oberoende.

Låt $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$ vara en bas för $\mathbb{R}^n$. Varje vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ kan skrivas som

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{f}_1 + x_2 \mathbf{f}_2 + \dots + x_n \mathbf{f}_n,$$

som på matrisform blir

$$\mathbf{x} = (\mathbf{f}_1 \quad \mathbf{f}_2 \quad \dots \quad \mathbf{f}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = F \mathbf{x}_F,$$

där $\mathbf{x}_F$ är $\mathbf{x}$ koordinater i basen F . Formeln $\mathbf{x} = F \mathbf{x}_F$ är den viktiga formeln att komma ihåg när det gäller att byta baser.

För två godtyckliga baser

$$F = (\mathbf{f}_1 \quad \mathbf{f}_2 \quad \dots \quad \mathbf{f}_n) \quad \text{och} \quad G = (\mathbf{g}_1 \quad \mathbf{g}_2 \quad \dots \quad \mathbf{g}_n).$$

får vi

$$G \mathbf{x}_G = F \mathbf{x}_F \iff \mathbf{x}_G = G^{-1} F \mathbf{x}_F \iff \mathbf{x}_F = F^{-1} G \mathbf{x}_G.$$