

- Mål:
- 1) Exempel för $A^t A x = A^t b$
 - 2) Kapitel 6 Determinant x Elementära Radoperationer
 - 3) Kapitel 7. Linjär Oberoende & Bas för $V = \mathbb{R}^n$.

1) Sats 5.35 sidan 175

$A_{m \times n} x_{n \times 1} = b_{m \times 1}$ överbestämt ekvationssystem ($m > n$)

$r(x) = Ax - b = \text{residualekvation}$

[Längden av $r(x)$ blir minimal OM x satisfierar Normalekvation $A^t A x = A^t b$]

Bewis

Först a) Visa att $r(x) \perp Ay$, för varje $y \in \pi = \text{span} \{ \begin{pmatrix} a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} a_n \end{pmatrix} \}$ $A = (a_1 \dots a_n)$

$$Ax, Ay \in \pi \Rightarrow Ax - Ay \in \pi \Rightarrow A(x-y) \in \pi$$

? $r(x) \perp Ay$?

$$A(y-x) \cdot r(x) = \underbrace{A(y-x)}_{\text{vektor}} \cdot \underbrace{(Ax-b)}_{\text{vektor}} =$$

$$(A(y-x))^t \cdot (Ax-b) = (y-x)^t \cdot A^t (Ax-b) =$$

$$(y-x)^t (A^t Ax - A^t b) = (y-x)^t \cdot 0 = 0$$

Enligt Hypotes

x satisfierar normalekvation

för alla $y \in \pi$.

Då $r(x) \perp Ay$.

b) visa att $\|r(x)\| \leq \|r(y)\|$ för alla $y \in \pi$

$$\underbrace{r(x)}_{\text{ortogonal}} + (Ay - Ax) = (Ax - b) + (Ay - Ax) = Ay - b = r(y)$$

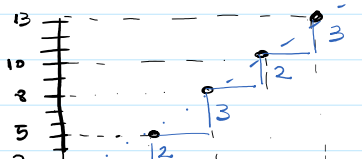
Enligt Pythagoras satsen

$$\|r(x)\|^2 + \|Ay - Ax\|^2 = \|r(y)\|^2$$

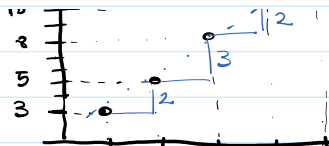
$$\text{Då } \|r(x)\| \leq \|r(y)\| \quad \forall y \in \pi.$$

□

Exempel 5.36



X	1	2	3	4	5
Y	3	5	8	10	13



$$y \mid 3 \ 5 \ 8 \ 10 \ 13$$

Vi vill hitta en rätt linje $y = kx + m$
som stämmer överens så bra som möjligt

$y = kx + m$
↑ ↑
Tabell

$$\begin{cases} 1. k + m = 3 \\ 2. k + m = 5 \\ 3. k + m = 8 \\ 4. k + m = 10 \\ 5. k + m = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \\ 10 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow \\ a_1 & a_2 \end{matrix} \quad 5 \times 2 \quad \quad \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{5 \times 1}$

Normalekvation $A^t A x = A^t b$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \\ 10 \\ 13 \end{pmatrix}$$

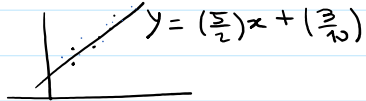
$$\begin{pmatrix} a_1^t a_1 & a_1^t a_2 \\ a_2^t a_1 & a_2^t a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^t b \\ a_2^t b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 55 & 15 \\ 15 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 142 \\ 39 \end{pmatrix}$$

Då $\begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} = \frac{1}{(55 \cdot 5 - (15)^2)} \begin{pmatrix} 5 & -15 \\ -15 & 55 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 142 \\ 39 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 142 \\ 39 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 25 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 3/10 \end{pmatrix}$$

$$y = \left(\frac{5}{2}\right)x + \left(\frac{3}{10}\right) \quad \square$$



$r(x) = b - Ax$ minimal.

Anmärkning $\begin{matrix} x & x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_m \\ y & y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_m \end{matrix}$

$$f(x) = kx^2 + mx + p$$

$$\begin{cases} x_1^2 k + m x_1 + p = y_1 \\ x_2^2 k + m x_2 + p = y_2 \\ \vdots \\ x_m^2 k + m x_m + p = y_m \end{cases} \quad \begin{matrix} u & v & w \\ \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_m^2 & x_m & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ m \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \\ \underbrace{\hspace{1cm}}_A \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_x = \underbrace{\hspace{1cm}}_b \end{matrix}$$

$$x_m^2 + m x_m + p = y_m$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_m^2 & x_m & 1 \end{pmatrix}}_{\Delta} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ m \\ p \end{pmatrix}}_{\chi} = \underbrace{y_m}_{b}$$

$$A^t A \chi = A^t b$$

$$\begin{bmatrix} u^t u & u^t v & u^t w \\ v^t u & v^t v & v^t w \\ w^t u & w^t v & w^t w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ m \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^t b \\ v^t b \\ w^t b \end{bmatrix}$$

2) Kapitel 6 Determinant

- Determinant som en funktion med egenskaper
- Determinant och Elementära Radoperationer
- Mer egenskaper

$$2.1 \quad A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1^t & - \\ -a_2^t & - \end{bmatrix}$$

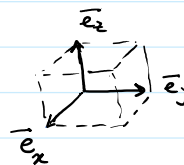
$$\det A = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

$$\det I_2 = 1$$

$$\begin{array}{c} a_2^t \\ \nearrow \\ \text{Area} = \det A_{2 \times 2} \\ \searrow \\ a_1^t \end{array}$$

$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} a_1^t \\ a_2^t \\ a_3^t \end{bmatrix}$$

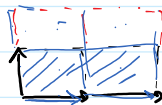
$$\det I_3 = 1$$



$$\text{Volym} = \det A_{3 \times 3}$$

Obs

$$\tilde{A}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 2a_1^t \\ 2a_2^t \end{bmatrix}$$



$$\tilde{\text{Area}} = 2 \text{Area} = 2 \det A_{2 \times 2}$$

$$\tilde{\text{Area}} = 2 \cdot 2 \text{Area} = (2 \cdot 2) \det A_{2 \times 2}$$

$$\tilde{A}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} \alpha a_1^t \\ \beta a_2^t \\ \gamma a_3^t \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det \tilde{A} = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \det A$$

$$A = \begin{pmatrix} r^t \\ r^t \\ a_3^t \end{pmatrix} \Leftrightarrow a^t = a_2^t$$

$$\Rightarrow \det A = 0$$



$$\det \begin{pmatrix} x_1^t + y_1^t \\ a_2^t \\ a_3^t \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x_1^t \\ a_2^t \\ a_3^t \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} y_1^t \\ a_2^t \\ a_3^t \end{pmatrix}$$

Def 6.1

$$W_n = \left\{ A_{n \times n} = \begin{pmatrix} -a_1^t & - \\ -a_n^t & - \end{pmatrix} \right\}$$

Def 6.1
Sidan 184

$$W_n = \left\{ A_{n \times n} = \begin{pmatrix} -a_1^t & - \\ & \ddots & \\ -a_n^t & - \end{pmatrix} \right\}$$

$$\det: W_n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$A_{n \times n} \rightarrow \det(A_{n \times n}) = \begin{vmatrix} -a_1^t & - \\ & \ddots & \\ -a_n^t & - \end{vmatrix}$$

med egenskaper:

- i) $\det(A)$ är en linjär avbildning av varje rad.
- ii) om 2 rader av A är lika så är $\det(A) = 0$
- iii) $\det(I_n) = 1$

Anmärkning: i). $A = \begin{pmatrix} -a_1^t & - \\ & \ddots & \\ -a_n^t & - \end{pmatrix}_{n \times n}$ $\tilde{A} = \begin{pmatrix} & a_1^t & \\ & \alpha a_i^t & \\ & & a_n^t \end{pmatrix}_{n \times n}$

- $\det \tilde{A} = \alpha \det A$
- $\det(kA) = k^n \det A$
- om $\alpha = 0 \Rightarrow \tilde{A}$ har en noll rad $\Rightarrow$
 $\det \tilde{A} = \alpha \det A = 0 \cdot \det A = 0$

2.2 Elementära Radoperationer & Determinant.

Elementära matrisen som representerar elementära radoperationer.

a) $E_{1 \leftrightarrow 2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Byta rad 1 med rad 2

$$E_{1 \leftrightarrow 2} \cdot A_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

b) $E_{\alpha, 1} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$E_{\alpha, 1} \cdot A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a_1^t & - \\ & \ddots & \\ -a_3^t & - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} \\ a_2^t & - \\ a_3^t & - \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\alpha a_1^t & - \\ -a_2^t & - \\ -a_3^t & - \end{pmatrix}$$

c) $E_{\alpha, 2 \rightarrow 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \alpha a_{21} + a_{31} & \alpha a_{22} + a_{32} & \alpha a_{23} + a_{33} \end{pmatrix}$$

Proposition 6.4
sidan 185

$$A_{n \times n}, B_{n \times n} = E \cdot A_{n \times n}$$

vi gör elementära radoperation
på A. och får B.

Då gäller:

• $B = E_{i \leftrightarrow j} A_{n \times n} : \det(B) = -1 \det A$
(byte av 2 rader av A)

• $B = E_{\alpha i} A : \det(B) = \alpha \det A$

• $B = E_{\alpha, i \rightarrow j} A : B = \begin{pmatrix} a_1^t \\ \vdots \\ a_i^t \\ \vdots \\ \alpha a_i^t + a_j^t \\ \vdots \\ a_n^t \end{pmatrix} :$

$$\rightarrow \boxed{\det B = \det A}$$

↳ Beris.

$$\det \begin{pmatrix} a_1^t \\ \vdots \\ a_i^t \\ \vdots \\ \alpha a_i^t + a_j^t \\ \vdots \\ a_n^t \end{pmatrix} = \alpha \det \begin{pmatrix} a_1^t \\ \vdots \\ a_i^t \\ \vdots \\ a_i^t \\ \vdots \\ a_n^t \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_1^t \\ \vdots \\ a_i^t \\ \vdots \\ a_j^t \\ \vdots \\ a_n^t \end{pmatrix}$$

$\det B$ $\text{rad}_i = \text{rad}_j$ $\det A$

Sats 6.5
sidan 186

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{Övertriangulär med diagonal elementer } a_{ii}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$$

Exempel 6.6
sidan 187

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 23 & -5 \\ 2 & 1 & 19 & 4 \\ -2 & -2 & -9 & 2 \\ 3 & 6 & 15 & -3 \end{pmatrix}_{4 \times 4} \quad \det A = 3 \begin{vmatrix} 3 & 8 & 23 & -5 \\ 2 & 1 & 19 & 4 \\ -2 & -2 & -9 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\det A = -3 \quad \left| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & 19 & 4 \\ -2 & -2 & -9 & 2 \\ 3 & 8 & 23 & -5 \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} \text{Pivot} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1 \end{array}$$

$$\det A = -3 \quad \left| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & -3 & 9 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & -2 \end{array} \right|$$

$$\det A = -3 \cdot (-3) \cdot 2 \quad \left| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{array}$$

$$\det A = 18 \quad \left| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & 3 \end{array} \right| \quad L_4 \leftarrow L_4 - L_3$$

$$\det A = 18 \quad \left| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right|$$

$$\begin{array}{r} 5 \\ 18 \\ \times 7 \\ \hline 126 \end{array}$$

$$\det A = 18 * (1 * 1 * 7 * (-1)) = -126$$

2.3 Mer egenskaper

(Ja ska göra ett extra material om §6.2 Konstruktion av determinant som använder permutation)

$$\text{Prop 6.17} \quad \left[\det(A^t) = \det(A) \right]$$

sidan 196

⊕ Men den där resultat kan man göra elementära operationer också med kolumner.

Exempel: 6.18
sidan 197

$$\det A = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 5 & -3 & 9 & 6 \\ 3 & 0 & 19 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{array} \right| =$$

Exempel 13.1

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 19 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

1st change of columns

$$\det A = - \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 9 & -3 & 5 & 6 \\ 19 & 0 & 3 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

2nd change of columns

$$\det A = (-1) \cdot (-1) \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & 5 \\ 6 & -3 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\det A = (-1)^3 \begin{vmatrix} 6 & -3 & 5 & 9 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$\det A = -(6 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 8) = -288.$$

Prop 6.19
sidan 198

$$A_{n \times n} \text{ inverterbar} \iff \det A \neq 0.$$

Hjälpsats 6.21
sidan 198

$$\begin{cases} E \text{ elementär matris} & B_{n \times n} \\ \det(E \cdot B) = \det(E) \cdot \det B \end{cases}$$

$$\det E_{i \leftrightarrow j} = -1$$

$$\det E_{\alpha, i} = \alpha$$

$$\det E_{\alpha, i \rightarrow j} = 1$$

Sats 6.22
sidan 199

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

Prop 6.23
sidan 200

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Beris

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$$

$$A^{-1}A = A.A^{-1} = I$$

$$\det(A.A^{-1}) = \det I = 1$$

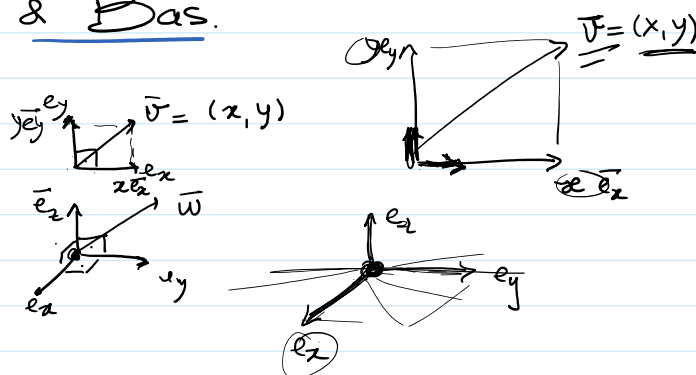
$$\det A \cdot \det A^{-1} = 1 \Rightarrow \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

$$\det A = \frac{1}{\det A^{-1}}$$

Kapitel 7 Linjär Oberoende & Bas.

$$V = \mathbb{R}^2 \quad C = \{\bar{e}_x, \bar{e}_y\}$$

$$V = \mathbb{R}^3 \quad C = \{\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z\}$$



$$V = \mathbb{R}^n$$

Def Vi säger att $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ är linjärt Oberoende om och endast om

$$\left[\sum_{i=1}^n x_i v_i = 0 \right] \text{ har bara } x = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ som lösning.}$$

$$x_1(v_1) + x_2(v_2) + \dots + x_n(v_n) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} | & | & | & \dots & | \\ v_1 & v_2 & v_3 & \dots & v_n \\ | & | & | & \dots & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A x = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Homogeneous system har bara en lösning när $\det A \neq 0$

A är inverterbar

$$x = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ unik solution}$$

Exempel:

$$S = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{u_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{u_2} \right\}$$

? är S en sätt av Oberoende vektor?

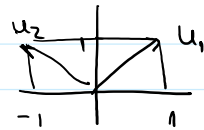
1.1

$$u_2 \perp u_1$$

$\vec{u}_1 \quad u_2$ vektor?

Lösning:

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\det A = 1 - (-1) = 2 \neq 0 \Rightarrow A^{-1} \text{ exists}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right] R_2 \leftarrow R_2 - R_1$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{array} \right]$$

Prop 7.3

$$u_1 \neq 0, u_2 \neq 0$$

$$\{u_1, u_2\} \text{ linjärt beroende} \iff u_1 // u_2 \iff u_1 = \alpha u_2$$

om och endast om

n=2: $x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$ Oberoende

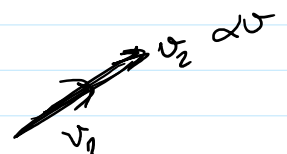
$$\begin{vmatrix} 1 & \square \\ 1 & \square \end{vmatrix} \text{ beroende} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$\leftarrow u$

Bem. $\{u_1, u_2\}$ Lberoende $\Rightarrow \alpha u_1 + \gamma u_2 = 0$ måste ha många lösning.
 $\alpha \neq 0, \gamma \neq 0$

$$\alpha u_1 = -\gamma u_2$$

$$u_1 = -\frac{\gamma}{\alpha} u_2 \quad \alpha \neq 0$$



$$\leftarrow \{u_1 // u_2 \rightarrow u_1 = k u_2 \Rightarrow \textcircled{1} u_1 - k u_2 = 0$$

$1, k$ är en annan lösning
 på $\sum_{i=1}^n x_i u_i = 0$

på $\sum_{i=1}^n x_i v_i = 0$

$\{v_1, v_2\}$ är Berörande.

Prop 7.4

$\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ Linjärt Berörande $\Leftrightarrow$

en av dem kan skrivas som linjär kombination av de andra.

Beris

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n = 0$$

De måste ha Många lösningar

Det finns något $x_i \neq 0$

$$\underbrace{x_i}_{\neq 0} v_i = -x_1 v_1 - x_2 v_2 - \dots - x_{i-1} v_{i-1} - x_{i+1} v_{i+1} - \dots - x_n v_n$$

$$v_i = -\frac{x_1}{x_i} v_1 - \dots - \frac{x_n}{x_i} v_n$$

Prop 7.6

$$C = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \text{ i } \mathbb{R}^n$$

$$A = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

C är linjärt oberoende $\Leftrightarrow A X = 0$
har unik lösning $X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

C är linjärt Berörande $\Leftrightarrow A X = 0$
har oändlig lösningar.

Def 7.8 $\{v_1, \dots, v_n\}$ utgör en bas för $V = \mathbb{R}^n$

OR
→ varje vektor av V kan skrivas som en unik linjär kombination av vektorna $\{v_1, \dots, v_n\}$

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n = \underline{b} \in \mathbb{R}^n$$

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n = \underline{b} \in \mathbb{R}^n$$

$$\begin{bmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$A \cdot X = b$$

med unik lösning
för alla $b \in \mathbb{R}^n$

$$X = A^{-1} b$$

$$\underline{\text{Bas}} = \begin{cases} \text{sätt av vektorer som är oberoende} \\ \text{och} \\ \text{Spann}\{v_1, \dots, v_n\} = V = \mathbb{R}^n \end{cases}$$

$$[b]_B = (x_1, x_2, \dots, x_n)_B \text{ koordinater av } b \text{ i Bas } B.$$

$$= x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

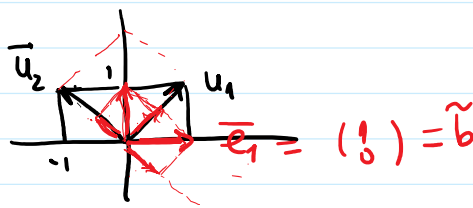
B är Bas? Vi vet att B är oberoende.

$$b = \begin{pmatrix} \alpha \\ \rho \end{pmatrix}$$

$$\bar{e}_1 = \tilde{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ? \quad b = x u_1 + y u_2 ?$$

$$\bar{e}_2 = \tilde{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \tilde{b} = a_1 u_1 + a_2 u_2 ?$$

$$b = \begin{pmatrix} \alpha \\ \rho \end{pmatrix}$$



$$b = \begin{pmatrix} \alpha \\ \rho \end{pmatrix} = \alpha \bar{e}_1 + \rho \bar{e}_2$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & \alpha \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \rho \end{array} \right] \leftrightarrow \begin{cases} A X = \tilde{b} \\ A X = \tilde{c} \\ A X = b \end{cases}$$

$\uparrow \quad \uparrow$
 $e_1 \quad e_2$

$e_1 \quad e_2$ $\sim \quad \sim \quad \sim \quad \sim$

$$\frac{1}{2} \left[\begin{array}{cc|cc|c} \textcircled{1} & -1 & 1 & 0 & \alpha \\ 0 & \frac{2}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\beta-\alpha}{2} \end{array} \right] \text{pivot} \quad R_2 \leftarrow R_2 - R_1$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\beta-\alpha}{2} \end{array} \right] R_1 \leftarrow R_1 + R_2 \quad \text{pivot}$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \alpha + \frac{\beta-\alpha}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\beta-\alpha}{2} \end{array} \right]}_I \quad \begin{array}{l} \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta-\alpha}{2} = \\ \frac{\alpha+\beta}{2} \end{array}$$

$$\tilde{b} = \bar{e}_1 = (1, 0)_c \quad (\bar{e}_1)_B = \left(\frac{1}{2} \right) (1, 1) + \left(-\frac{1}{2} \right) (-1, 1) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right)_B$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right)$$

$$(1, 0)_c$$

$$c = \bar{e}_2 = (0, 1) \quad (\bar{e}_2)_B = \frac{1}{2} (1, 1)_c + \frac{1}{2} (-1, 1)_c = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)_B$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)$$

$$(0, 1)_c$$

$$\begin{bmatrix} (f_1)_c \\ (f_2)_c \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{[u]_F} = [u]_c$$