

Blandat upp Kap 6

1. $\det(X) = 7$ $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$

a) $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 2y_1 & 2y_2 & 2y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$ $\det A = 2 \det X = 2 \cdot 7 = 14$

b) $B = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$ $B = E_{1 \leftrightarrow 2} \cdot X$
 $\det B = \det(E_{1 \leftrightarrow 2} \cdot X) = \det(E_{1 \leftrightarrow 2}) \cdot \det X = -\det X = -7$

c) $C = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 2x_1 + y_1 & 2x_2 + y_2 & 2x_3 + y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$ (Lösning: $\det C = \det X$)

linjär funktion $= \left\| \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \right\| + \left\| \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \right\|$

$2 \underbrace{\left\| \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \right\|}_0 + \underbrace{\left| \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \right|}_{\det X} = 2 \cdot 0 + 7 = 7$
 $r_1 = r_2 \Rightarrow \det = 0$

d) $D = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$ $\det D = 0$ (rad som är null)

$\left| \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0y_1 & 0y_2 & 0y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \right| = 0 \left| \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_3 \\ 1 & & \\ z_1 & \dots & z_3 \end{pmatrix} \right| = 0 \cdot \det X = 0$

e) $F = X^t = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$

$$\det F = \det(X^t) = \det X = 7$$

$$f) G = \begin{pmatrix} 2y_1 - z_1 & 2y_2 - z_2 & 2y_3 - z_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ -x_1 & -x_2 & -x_3 \end{pmatrix}$$

$$\det G = -1 \begin{vmatrix} 2y_1 - z_1 & 2y_2 - z_2 & 2y_3 - z_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$$\underbrace{(-1)(-1)}_{(+)} \begin{vmatrix} 2y_1 - z_1 & 2y_2 - z_2 & 2y_3 - z_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 2y_1 - z_1 & 2y_2 - z_2 & 2y_3 - z_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

$$- \left(\begin{vmatrix} -x_1^t \\ 2y_1^t \\ z_1^t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -x_2^t \\ -z_2^t \end{vmatrix} \right)$$

$$- 2 \begin{vmatrix} -x_1^t \\ -y_1^t \\ -z_1^t \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_2^t \\ z_2^t \\ z_2^t \end{vmatrix} \quad \text{Summa}$$

$$- 2 \det X$$

$$- 2(7) = -14$$

Bargue

U6.a

$$\begin{pmatrix} \textcircled{1} & -4 & 5 & 6 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 9 & 3 \\ \textcircled{3} & -2 & 7 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{Pivot} - R_1 \\ R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 + R_1 \\ R_4 \leftarrow R_4 - 3R_1 \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 & 5 & 6 \\ 0 & -2 - 2(-4) & 3 - 2(5) & 1 - 2(6) \\ 0 & -4 & 14 & 9 \\ 0 & -2 + 3(4) & 7 - 3(5) & 1 - 3(6) \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 & 6 \\ 0 & 6 & -7 & -11 \\ 0 & -4 & 14 & 9 \\ 0 & 10 & -8 & -17 \end{pmatrix} \right| \begin{array}{l} \text{Pivot} \\ R_3 \leftarrow R_3 + \frac{4}{3} R_2 \\ R_4 \leftarrow R_4 - \frac{10}{3} R_2 \end{array}$$

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 & 6 \\ 0 & 6 & -7 & -11 \\ 0 & 0 & 14 + \frac{2}{3}(-7) & 9 + \frac{2}{3}(-11) \\ 0 & 0 & -8 - \frac{5}{3}(-7) & -17 - \frac{5}{3}(-11) \end{pmatrix} \right|$$

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 & 6 \\ 0 & 6 & -7 & -11 \\ 0 & 0 & \frac{28}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & \frac{11}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \right| R_4 \leftarrow R_4 - \frac{11/3}{28/3} R_3$$

$$\frac{11}{3} - \frac{11}{3} \cdot \frac{(28/3)}{(28/3)}$$

$$\det A = \tilde{a}_{11} \tilde{a}_{22} \tilde{a}_{33} \tilde{a}_{44}$$

Kapitel 5

5.2 sidan 177

$$\begin{array}{l} \pi_1 \\ \pi_2 \end{array} \begin{cases} x + 2y + 2z = 5 \\ 2x - y + 2z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 5 \\ -2x + y - 2z = -2 \end{cases}$$

$$-x + 3y = 3$$

$$\boxed{x = 3y - 3} \Rightarrow (\pi_1): (3y - 3) + 2y + 2z = 5$$

$$2z = 5 + 3 - 5y$$

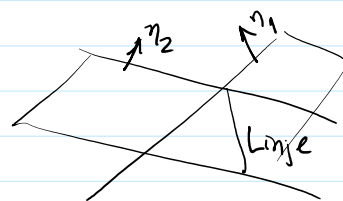
$$z = \frac{8}{2} - \frac{5}{2}y$$

$$\begin{cases} x = -3 + 3y \\ y = / \\ z = 4 - \frac{5}{2}y \end{cases}$$

$$\uparrow \eta_1 = (1, 2, 2)$$

$$\uparrow \eta_2 = (2, -1, 2)$$

$$\eta_1 \neq \alpha \eta_2$$



$$\begin{cases} y = \dots \\ z = 4 - \frac{5}{2}x \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5/2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$x = \underbrace{x_0}_{\text{}} + t \underbrace{v}_{\text{}} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ också riktningsvektor}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5/2 \end{pmatrix}$$

5.4d) Bestäm alla lösningar. $Ax=b$

$$T(A|b) = \left(\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{array} \right)$$

trappstegsform är redo.

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$1x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 2$$

$$1x_3 - 1x_4 - 2x_5 = 3$$

$$2x_5 = 6$$

$$\boxed{x_5 = 3}$$

$$x_3 = +x_4 + 2x_5 + 3$$

$$\boxed{x_3 = x_4 + 2(3) + 3 = 9 + 1x_4}$$

$$1x_1 + 2x_2 + 3(x_4 + 9) + 4x_4 + 5(3) = 2$$

$$1x_1 + 2x_2 + 3x_4 + 27 + 4x_4 + 15 = 2$$

$$\boxed{1x_1 + 2x_2 + 7x_4 = 2 - 15 - 27 = -40}$$

$$1x_1 = -40 - 2x_2 - 7x_4$$

$$x_2 = x_2$$

$$1x_3 = 9 \quad / \quad 1x_4$$

$$x_i = x_i$$

fin

$$\text{fria} \begin{cases} 1x_3 = 9 \\ x_4 = x_4 \\ 1x_5 = 3 \end{cases} \quad / \quad 1x_4$$

$$AX = 0$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -40 \\ 0 \\ 9 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\text{particular lösning}} + \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{AX=0} \cdot X$$

$$AX = b$$

$$X = X_p + X_H$$

$$AX = \underbrace{AX_p}_b + \underbrace{AX_H}_0 = b$$

Obs Man kan också göra Gausselimination så att vi har reducerade trappstegform of $T = (A:b)$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 \leftarrow R_2 + R_3 \\ \text{pivot } R_2 \leftarrow \frac{1}{2}R_2}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \text{ pivot}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 7 & 0 & -13-27 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - 3R_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 7 & 0 & -13-27 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \text{ pivot}$$

Här kan man identifiera fria parameter: de stannar på fria kolumner (utan pivot)

reducerad trappstegform

• alla pivot är lika 1

• alla andra element i pivots kolumn är NOLL.

Då att hitta lösning kommer vi tillbaka till ekvationssystem:

$$1x_1 + 2x_2 + \quad + 7x_4 \quad \dots = -40$$

$$1x_3 - 1x_4 \quad \dots = 9$$

$$1x_5 = 3$$

$$x_1 = -40 - 2x_2 - 7x_4 \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_1 = -40 & -2x_2 & -7x_4 \\ x_3 = 9 & & +1x_4 \\ x_5 = 3 & & \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40 \\ 0 \\ 9 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_4$$

5e $T = (A : b)$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 1 \quad 0 = 1 ???$$

8 Bestäm linje $y = Kx + m$ som bäst
(i minstakvadrat mening) approximerar

x	0	1	2	3	4
y	4	7	9	10	12

$$\begin{cases} K \cdot (0) + m = 4 \\ K \cdot (1) + m = 7 \\ K \cdot (2) + m = 9 \\ K \cdot (3) + m = 10 \\ K \cdot (4) + m = 12 \end{cases}$$

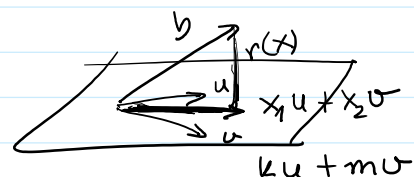
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 9 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix}$$

5×2 2×1 5×1

Normal ekvation

$$A^t A X = A^t b$$

$$\begin{pmatrix} u^t \\ v^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & v \\ 1 & 1 \end{pmatrix} (X) = \begin{pmatrix} u^t \\ v^t \end{pmatrix} (b)$$



$$\begin{pmatrix} u^t \cdot u & u^t \cdot v \\ v^t \cdot u & v^t \cdot v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^t \cdot b \\ v^t \cdot b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = (30)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + 4 + 9 + 16 = 30$$

$$u^t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 14$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 9 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + 7 + 18 + 30 + 48 \\ 4 + 7 + 9 + 10 + 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 103 \\ 42 \end{pmatrix}$$

$$A^t A x = A^t b$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}}_B \begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 103 \\ 42 \end{pmatrix}$$

$$\det B \neq 0 \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{\det B} \begin{pmatrix} 5 & -10 \\ -10 & 30 \end{pmatrix} =$$

$$\det B = 5(30) - 100$$

$$B^{-1} = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 5 & -10 \\ -10 & 30 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} 103 \\ 42 \end{pmatrix} = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 5 & -10 \\ -10 & 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 103 \\ 42 \end{pmatrix} = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 95 \\ 230 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{19}{10} \\ \frac{23}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{y = \frac{19}{10}x + \frac{23}{5}}$$

□

5.4 a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Homogenous

$$\boxed{Ax = b} \quad b \neq 0$$

$$\boxed{Ax = 0} \quad \text{Homogeneous}$$

$$T = (A : b : 0)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \quad R_1 \leftarrow R_1 - 3R_2 \quad \text{pivot}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & | & -7 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{Homogeneous} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$1x_1 + 2x_2 = -7$$

$$1x_3 = 3$$

$$x_1 = -2x_2 - 7$$

$$x_2 = x_2$$

$$x_3 = 3$$

$$x_1 = -7 - 2x_2$$

$$x_2 = 0 + 1x_2$$

$$x_3 = 3 + 0x_2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X = X_p + X_h$$

$$1x_1 + 2x_2 + 1x_3 = 0$$

$$0 + 0 \quad x_3 = 0$$

$$1x_1 = -2x_2 = 0 - 2x_2$$

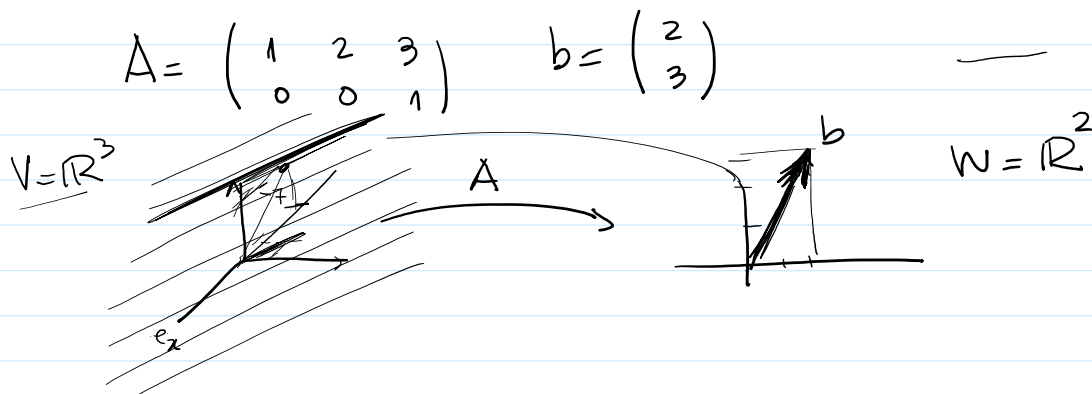
$$x_2 = x_2 = 0 + 1x_2$$

$$x_3 = 0 = 0 + 0$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

X_h



5b)
$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 5 \\ 2x + 2y + 5z = 9 \\ 3x + 12y + 3z = 18 \end{cases}$$

$A \vec{x} = b$

$T = (A | b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 5 & 9 \\ 3 & 12 & 3 & 18 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{pivot}} \begin{array}{l} R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1 \end{array}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -3 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{pivot}} R_3 \leftarrow R_3 + 3R_2$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{pivot}} R_1 \leftarrow R_1 + R_2$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{pivot}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$

$1x_1 + 0x_2 + 3x_3 = 4 \Rightarrow 1x_1 = 4 - 3x_3$

$1x_2 - 1/2 x_3 = 1/2 \Rightarrow 1x_2 = 1/2 + 1/2 x_3$

$x_3 = 0 + x_3$

$|x_1| \quad |4| \quad | -3|$

$$x_3 = 0 + \cancel{(3)}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x_p} + t \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x_H}$$

$$X = X_p + X_H$$

$$\begin{array}{c|ccccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ \hline 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}$$

$$1x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 2$$

$$1x_3 - 1x_4 - 2x_5 = 3$$

$$\boxed{2x_5 = 6} \Rightarrow \boxed{x_5 = 3}$$

$$1x_3 = 3 + x_4 + 2x_5$$

$$x_3 = 3 + x_4 + 2(3) = 9 + x_4$$

$$\boxed{x_3 = 9 + x_4}$$

$$1x_1 + 2x_2 + 3(9 + x_4) + 4x_4 + 5(3) = 2$$

$$x_1 + 2x_2 + 27 + 3x_4 + 4x_4 + 15 = 2$$

$$x_1 + 2x_2 + 7x_4 = 2 - 15 - 27 = -40$$

$$\begin{array}{l} x_1 = -40 - 2x_2 - 7x_4 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = 9 + x_4 \\ x_4 = x_4 \\ x_5 = 3 \end{array}$$

$$x_1 = -40 - 2x_2 - 7x_4$$

$$x_2 = x_2$$

$$x_3 = 9 + 1x_4$$

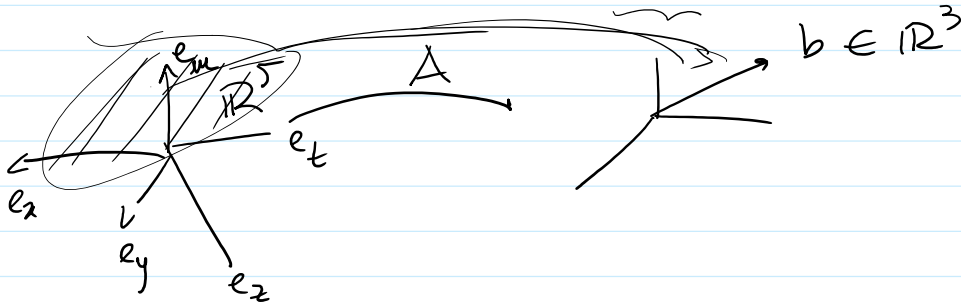
$$x_4 = x_4$$

$$x_5 = 3$$

$$X_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X_5 = 3$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40 \\ 0 \\ 9 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Kapitel 6 Blandade Övningar

6.4 Låt x vara ett godtyckligt reellt tal
Vi definierar $A_{n \times n} = [a_{ij}]$ $a_{ij} = (x + i + j - 2)^2$

- a) Visa att $\det(A) = -8$ om $n=3$ oavsett vad x är.
b) Visa att $\det(A) = 0$ om $n \geq 4$ oavsett vad x är.

a) Lösning $n=3$.

$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} x^2 & (x+1)^2 & (x+2)^2 \\ (x+1)^2 & (x+2)^2 & (x+3)^2 \\ (x+2)^2 & (x+3)^2 & (x+4)^2 \end{bmatrix}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} x^2 & x^2+2x+1 & x^2+4x+4 \\ x^2+2x+1 & x^2+4x+4 & x^2+6x+9 \\ x^2+4x+4 & x^2+6x+9 & x^2+8x+16 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

Vi vet att: $E_{i,d \rightarrow j}$ elementär radoperation $\det(E_{i,d \rightarrow j} A) = \det A$
Då använder vi elementära radoperationer att simplificera matrisen A ,
så att man kan räkna determinanten. $\det A = 1 \cdot 1$

$$\begin{array}{l|lll} R_1 & x^2 & x^2+2x+1 & x^2+4x+4 \\ R_2 \leftarrow R_2 - R_1 & 2x+1 & 2x+3 & 2x+5 \\ R_3 \leftarrow R_3 - R_1 & 4x+4 & 4x+8 & 4x+12 \end{array}$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - 2R_2 \quad \left| \begin{array}{ccc|c} x^2 & x^2+2x+1 & x^2+4x+4 & \\ 2x+1 & 2x+3 & 2x+5 & \\ 2 & 2 & 2 & \end{array} \right|$$

$$2 \quad \left| \begin{array}{ccc|c} x^2 & x^2+2x+1 & x^2+4x+4 & \\ 2x+1 & 2x+3 & 2x+5 & \\ 1 & 1 & 1 & \end{array} \right|$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - R_2$$

Man kan göra elementära operationer med kolumner också

$$2 \quad \left| \begin{array}{ccc|c} x^2 & x^2+2x+1 & 2x+3 & \\ 2x+1 & 2x+3 & 2 & \\ 1 & 1 & 0 & \end{array} \right|$$

$$K_2 \leftarrow K_2 - K_1$$

$$2 \quad \left| \begin{array}{ccc|c} x^2 & 2x+1 & 2x+3 & \\ 2x+1 & -2 & 2 & \\ 1 & 0 & 0 & \end{array} \right|$$

$$2 \left(\cancel{x^2 \cdot 2 \cdot 0} + \cancel{(2x+1) \cdot 0 \cdot (2x+3)} + 1 \cdot \overbrace{(2x+1)(2)} - (2x+3) \cdot 2 - 0 - 0 \right)$$

$$2 (\cancel{4x+2} - \cancel{4x} - 6) = 2(-4) = -8$$

Oavsett vad x är. $\square$

6.4 b. $n=4$

$$A_{4 \times 4} = [a_{ij}] \quad a_{ij} = (x+i+j-1)^2$$

$$A_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} x^2 & x^2+2x+1 & x^2+4x+4 & x^2+6x+9 \\ x^2+2x+1 & x^2+4x+4 & x^2+6x+9 & x^2+8x+16 \\ x^2+4x+4 & x^2+6x+9 & x^2+8x+16 & x^2+10x+25 \\ x^2+6x+9 & x^2+8x+16 & x^2+10x+25 & x^2+12x+36 \end{bmatrix}$$

Igen använder vi detta $E_{d,i \rightarrow j}$ elementära radoperationer. som byter inte determinants värde.

$$\begin{array}{l} R_2 \leftarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - R_1 \end{array} \quad \left| \begin{array}{ccc|c} x^2 & x^2+2x+1 & x^2+4x+4 & x^2+6x+9 \\ 2x+1 & 2x+3 & 2x+5 & 2x+7 \\ 4x+4 & 4x+8 & 4x+12 & 4x+16 \\ 6x+9 & 6x+15 & 6x+21 & 6x+27 \end{array} \right|$$

$$K_2 \leftarrow K_2 - K_1$$

$$K_3 \leftarrow K_3 - K_1$$

$$K_4 \leftarrow K_4 - K_1$$

$$\begin{array}{l} R_3 \leftarrow R_3 - 2R_2 \\ R_4 \leftarrow R_4 - 3R_2 \end{array} \quad \begin{vmatrix} x^2 & 2x+1 & 4x+4 & 6x+9 \\ 2x+1 & 2 & 4 & 6 \\ 4x+4 & 4 & 8 & 12 \\ 6x+9 & 6 & 12 & 18 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x^2 & 2x+1 & 4x+4 & 6x+9 \\ 2x+1 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$K_3 \leftarrow K_3 - 2K_2 \quad K_4 \leftarrow K_4 - 3K_2$$

$$\begin{vmatrix} x^2 & 2x+1 & 2 & 6 \\ 2x+1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$\det A = \det A^t$ $A \equiv$ triangulär matris. Då $\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot a_{44}$

Men $\det A_{4 \times 4} = 6 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 6 = 0$

Då $\det A_{4 \times 4} = 0$, oavsett vad x är.

Nu behöver vi använda Induktion att visa att den här typ av matris ska ha $\det A \equiv 0$, oavsett vad x är. för alla $n \geq 4$, $n \in \mathbb{N}$.

Ja ska inte göra nu den här del.

6.5 sidan 202.

Man säger att 2 matriser $A_{n \times n}$ och $B_{n \times n}$ är konjugerade om det finns en inverterbar matris $C_{n \times n}$ sådant att:

$$A = C B C^{-1}.$$

a) visa att: om A och B är konjugerade så är $\det(A) = \det(B)$.

lösning:

A, B konjugerade då finns det $C_{n \times n}$ inverterbar

hått $A = C \cdot B \cdot C^{-1}$

då $\det A = \det (C \cdot B \cdot C^{-1})$

$$\begin{aligned}
&= \det(C) \det(\underbrace{B \cdot C^{-1}}) = \\
&= \det(C) \cdot \det B \cdot \det C^{-1} = \\
&= \det(C) \cdot \det(C^{-1}) \cdot \det B = \\
&= \cancel{\det C} \cdot \frac{1}{\cancel{\det C}} \cdot \det B
\end{aligned}$$

Och då $\det A = \det B$ $\square$.

6.5. b) Att visa att "vara konjugerade" är en ($\equiv$) ekvivalensrelation behöver vi visa att:

i) $A \equiv A$

ii) $A \equiv B \Rightarrow B \equiv A$

iii) $A \equiv B \wedge B \equiv C \Rightarrow A \equiv C$

i) A är konjugerad till sig själv ($A \equiv A$)
därför att, det finns I_d och I_d inverterbar så att

$$A = I_d \cdot A \cdot I_d^{-1}$$

ii) $A \equiv B$ då A är konjugerad till B och därefter
 $\exists K$ inverterbar matris så att

$$A = K \cdot B \cdot K^{-1}$$

Men då $K^{-1} A = \underbrace{K^{-1} K}_{I_d} \cdot B \cdot K^{-1} \Rightarrow K^{-1} A = B \cdot K^{-1} \Rightarrow$

$$K^{-1} A K = B \underbrace{K^{-1} K}_{I_d} \Rightarrow \boxed{B = K^{-1} A K}$$

då $B \equiv A$.

iii) $A \equiv B \wedge B \equiv C \Rightarrow A \equiv C$

Enligt Hypotes $A \equiv B \Rightarrow \exists K_{n \times n} / A = K \cdot B \cdot K^{-1}$
 $B \equiv C \Rightarrow \exists T_{n \times n} / B = T \cdot C \cdot T^{-1}$

$$A = K \cdot B \cdot K^{-1} = K (T \cdot C \cdot T^{-1}) K^{-1} = (KT) \cdot C \cdot \underbrace{(T^{-1} K^{-1})}_{\uparrow}$$

men $(KT)^{-1} = T^{-1} \cdot K^{-1}$

Då finns det $(K \cdot T)$ inverterbar så att
 $A = (K \cdot T) C (K \cdot T)^{-1}$

Då $A \equiv C$.

6.5 c) ekvivalensklassen för identitetsmatrisen

$$I_d\text{-klass} = \{ A / A \equiv I_d \}$$

$A \equiv I_d$, om $\exists K$ inverterbar så att

$$A = \underbrace{K \cdot I_d \cdot K^{-1}} = K \cdot K^{-1} = I_d$$

Da I_d -klan = $\{I_d\}$ bara ett element.

6.6. Antag $C_{n \times n}$, $B_{m \times m}$ $\det(C) = 175$
 $\det(B) = 7$

Låt A vara en matris sådant att

$$A B A^t = C$$

a) Bestäm $\det(A)$ om $m=n$.

$$\det(A \cdot B \cdot A^t) = \det C \Rightarrow$$

$$\underbrace{\det A \cdot \det B \cdot \det(A^t)} = \det C \Rightarrow$$

$$(\det A)^2 \cdot \det B = \det C \Rightarrow (\det A)^2 = 175 \cdot \frac{1}{\det(B)}$$

$$(\det A)^2 = \frac{175}{7} \quad \therefore \det A = \sqrt{\frac{175}{7}} \quad \begin{array}{r} 175 \overline{) 7} \\ 14 \quad 25 \\ \underline{35} \end{array}$$

$$\det A = \sqrt{25} = \pm 5$$

6.6.b) $\begin{matrix} A & B & A^t \\ n \times m & m \times m & m \times n \end{matrix} = C_{n \times n}$

$$\det \left(\underbrace{A}_{n \times m} \cdot \underbrace{B}_{m \times m} \cdot \underbrace{A^t}_{m \times n} \right) = C_{n \times n}$$

men $\det(A_{n \times m})$ är ej definierad

därför att $A_{n \times m}$ inte är en kvadratmatris

□