

Kapitel 6 - Avsnitt 6.2 sidan 188

Syftet med detta avsnitt är att presentera en formel för beräkning av determinanten för en matris av vilken storlek som helst. För att motivera stegen i konstruktionen av den allmänna formeln används begreppet permutation.

Min presentation här kommer bara att vara i en något annan ordning än den som presenteras i boken, bara i ett försök att hjälpa till att förstå idéer.

—, —, —, —, —

Vi börjar att komma ihåg formeln att räkna determinant för $A_{2 \times 2}$ och $A_{3 \times 3}$.

$$\det A_{2 \times 2} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

$$\det A_{3 \times 3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32}) - a_{12}(a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{31}) + a_{13}(a_{21} \cdot a_{32} - a_{22} \cdot a_{31})$$

$$\begin{aligned} &= a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} \\ &- a_{12} a_{21} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} \\ &+ a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} \end{aligned}$$

1) Vad har de två formelerna gemensamt?

2) Varför är vissa termer positiva och andra negativa?

3) Vad är regeln för att bestämma denna signalvariation?

1) För fallet 2×2 bildas varje term av produkten av 2 element i matrisen

För fallet 3×3 har vi 3 matristermier i var och en av för formeltermerna.

$$\begin{array}{l} a_{1\Box} \cdot a_{2\Box} \\ a_{1\Box} \cdot a_{2\Box} \cdot a_{3\Box} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{och i alla fall finns det} \\ \text{ett vanligt mönster} \end{array} \right.$$

1.2 2×2 fall

$$\begin{array}{l} a_{1\boxed{1}} a_{2\boxed{2}} \longrightarrow (1, 2) \\ - a_{1\boxed{2}} a_{2\boxed{1}} \longrightarrow (2, 1) \end{array}$$

$M_2 = \{1, 2\}$ 2 elementer

π_2 : permutation av 2 elementer av M_2

$$\boxed{} \cdot \boxed{} \\ (2) \quad (2-1)$$

$2 \times 1 = 2$ möjliga permutationer av 2 elementer

1.3 3×3 fall

$$\begin{array}{l} a_{1\boxed{1}} a_{2\boxed{2}} a_{3\boxed{3}} \quad 1 \ 2 \ 3 \\ - a_{1\boxed{1}} a_{2\boxed{3}} a_{3\boxed{2}} \quad (-) \ 1 \ 3 \ 2 \\ - a_{1\boxed{2}} a_{2\boxed{1}} a_{3\boxed{3}} \quad (-) \ 2 \ 1 \ 3 \\ + a_{1\boxed{2}} a_{2\boxed{3}} a_{3\boxed{1}} \quad 2 \ 3 \ 1 \\ + a_{1\boxed{3}} a_{2\boxed{1}} a_{3\boxed{2}} \quad 3 \ 1 \ 2 \\ - a_{1\boxed{3}} a_{2\boxed{2}} a_{3\boxed{1}} \quad (-) \ 3 \ 2 \ 1 \end{array}$$

$M_3 = \{1, 2, 3\}$

π_3 : permutation of 3 elementer av M_3

id: $(1, 2, 3) \quad +$

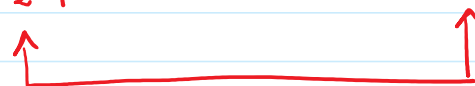
π_1 : $(2, 1, 3) \quad -$

π_2 : $(2, 3, 1) \quad +$

π_3 : $(1, 3, 2) \quad -$

π_4 : $(3, 2, 1) \quad -$

π_5 : $(3, 1, 2) \quad +$



Humm!

Det finns så många termer ($n=3$ fall) som permutationer av 3 elementer

Och det gäller för ($n=2$ fall) också.

2) Nu behöver vi förklara tecken (positiv eller negativ). För att göra det, behöver jag presenterar idéer med samma

2) Nu behöver vi förklara tecken (positiv eller negativ).
För att göra det, behöver jag presentera idén med samma notation som är i boken:

Titta sidan 189.

Prop 6.9 : Antalet permutationer av $M_n = \{1, 2, \dots, n\}$ är $n!$

$$S_n = \{ \underbrace{(1, 2, 3, \dots, n)}_{\text{id}}, \pi_1 = (2, 1, 3, \dots, n), \dots, \pi_n = \text{permutation} \}$$

$$|S_n| = n!$$

Definition: $\pi: M_n \rightarrow M_n$ bijektiva funktion

$$\begin{array}{l} n \rightarrow \pi(n) \\ 1 \rightarrow \pi(1) \\ 2 \rightarrow \pi(2) \\ \vdots \\ n \rightarrow \pi(n) \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \pi = (\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n)) = \pi(1, 2, \dots, n) \end{array} \right.$$

π bijektiv, då finns alltid $\pi^{-1}: M_n \rightarrow M_n$ så att

$$\begin{array}{l} \pi^{-1}: M_n \rightarrow M_n \\ \pi^{-1}(\pi(1)) \rightarrow 1 \\ \pi^{-1}(\pi(2)) \rightarrow 2 \\ \vdots \\ \pi^{-1}(\pi(n)) \rightarrow n \end{array} \quad \pi^{-1}(\pi(1, 2, \dots, n)) = \text{id}(1, 2, \dots, n)$$

$$\text{Ex: } M_4 = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\text{id} = (1, 2, 3, 4) \in S_4 = \{ \pi(1, 2, 3, 4) / \pi \text{ permutation} \}$$

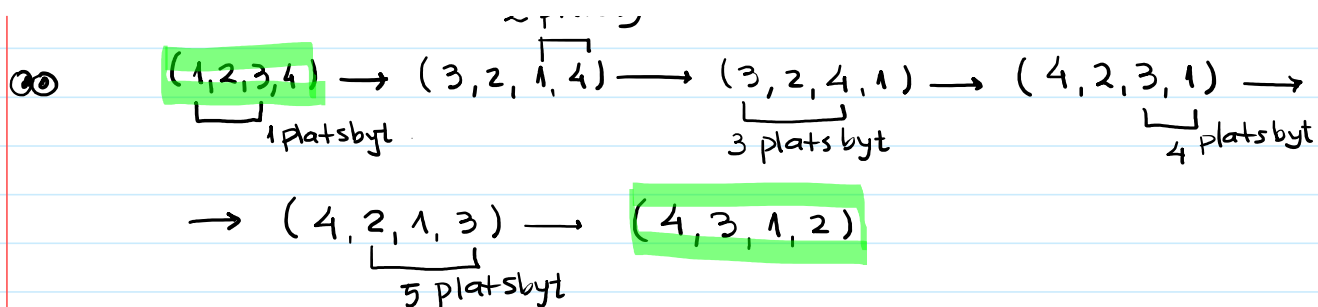
Vi kan tänka att alla andra permutationer $\pi_i \in S_n$

kan skopas som platsbyter av id.

$$\textcircled{1} \quad \underbrace{(1, 2, 3, 4)}_{\text{platsbyt}} \rightarrow (4, 2, 3, 1) \xrightarrow{\text{platsbyt}} (4, 3, 2, 1) \xrightarrow{\text{platsbyt}} \underbrace{(4, 3, 1, 2)}_{(3 \text{ platsbyter})}$$

eller

$$\textcircled{2} \quad \underbrace{(1, 2, 3, 4)}_{\text{2 platsbyt}} \rightarrow (3, 2, 1, 4) \xrightarrow{\text{2 platsbyt}} (3, 2, 4, 1) \rightarrow (4, 2, 3, 1) \rightarrow$$



Obs: I båda fall skapade vi $(4, 3, 1, 2)$ som platsbyter av $\text{id} = (1, 2, 3, 4)$

Men i $\textcircled{0}$ behövde vi 3 platsbyter
i $\textcircled{00}$ behövde vi 5 platsbyter

Båda är Udda värde

(Sidan 190) Vi säger att båda permutationer har samma paritet
d.v.s samtidigt udda (eller jämn) antalet platsbyten.

Definition 6.12
sidan 192.

Vi säger att en permutation π är jämn om det krävs ett jämnt antal platsbyten för π .
 π är udda om det krävs ett udda antal platsbyten för π .

Prop 6.11 Om π är en permutation så är antalet platsbyten för att överföra identitetspermutation till π antingen alltid udda eller alltid jämnt.

Det är en så kallades Invariant.

$$\varepsilon: S_n \rightarrow \{-1, 1\}$$

$$\pi \mapsto \varepsilon(\pi) = \begin{cases} 1 & \text{om } \pi \text{ är jämn} \\ -1 & \text{om } \pi \text{ är udda.} \end{cases}$$

Då kan man presentera:

Sats 6.14
sidan 192

Det finns en unik determinant för $n \times n$ matriser och den ges av

$$\det A = \sum_{\pi \in S_n} \varepsilon(\pi) a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \dots a_{n\pi(n)}$$

(6.3)

Och nu förklarade vi varifrån kommer teckens variation som vi hade i formel för $A_{2 \times 2}$ eller $A_{3 \times 3}$.

I boken sidan 193 och 194 finns det Bevis av satsen 6.14.

Anmärkning

När man räknar $\det(A)$ via propositionen 6.14 behöver man $\sum_{i=1}^n \circ$, och $\underline{\underline{|S_n| = n!}}$ summa

Som poängteras i boken sidan 195, är formeln (6.3) inte speciellt lämpad för att beräkna determinanten för större matriser, inte minst för att det finns $n!$ termer som var och en kräver $(n-1)$ multiplikationer vilket ger $(n-1) \cdot n!$ (det växer mycket snabbt med n).

$n=5 \rightarrow 120$ termer och måste göra 480 multiplikationer

Metode som använda radoperationer kräver mindre $n^3/2$ multiplikationer $\square$.