

Sammanfattning föreläsning 12, Linjär algebra IT, VT2021

Om $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ är en linjär avbildning, G en bas för $\mathbb{R}^m$, så är matrisen för f relativt basen G matrisen A_G som uppfyller

$$f(\mathbf{v})_G = A_G \mathbf{v}_G.$$

$$A_G = (f(\mathbf{g}_1)_G \quad f(\mathbf{g}_2)_G \quad \cdots \quad f(\mathbf{g}_n)_G)$$

Om en linjär avbildning $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ har matrisen A_G relativt basen G så har den matrisen

$$A_E = G A_G G^{-1}$$

relativt standardbasen.

Vi säger att en bas är en ortonormal bas, eller kortare ON-bas, om basvektorerna är parvis ortogonala och har längd 1.

En linjär avbildning från $f_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ är isometrisk om den bevarar längder, d v s om

$$\|f_A(\mathbf{x})\| = \|A\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|,$$

för alla vektorer $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Motsvarande matris A säges vara en ON-matris.

En isometrisk linjär avbildning $f_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ bevarar skalärprodukter, d v s

$$f(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \quad \text{eller} \quad (A\mathbf{x}) \cdot (A\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}.$$

för alla vektorer $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$.

Den kvadratiske matrisen A är en ON-matris om och endast om dess kolumner utgör en ON-bas.

Den kvadratiske matrisen A är en ON-matris om och endast $A^t = A^{-1}$.

Låt A vara en $n \times n$ -matris. En n -vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ som är sådan att

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

kallas för en egenvektor till A . Talet λ kallas för ett egenvärde till A .