

Sammanfattning föreläsning 13, Linjär algebra IT, VT2021

Om $\mathbf{v}$ är en egenvektor till A med egenvärde λ och $c \neq 0$, så gäller att också $c\mathbf{v}$ är en egenvektor till A med egenvärde λ .

Antag att $\mathbf{v}$ är en egenvektor till A med egenvärdet λ , dvs $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Då gäller att $\mathbf{v}$ är en egenvektor till A^m för alla $m \in \mathbb{N}$ med egenvärdet λ^m , dvs

$$A^m\mathbf{v} = \lambda^m\mathbf{v}.$$

Om A är inverterbar så gäller också att $\mathbf{v}$ är en egenvektor till A^m med egenvärdet λ^m för alla negativa m . Speciellt är då

$$A^{-1}\mathbf{v} = \lambda^{-1}\mathbf{v} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{v}$$

så A^{-1} har egenvektor $\mathbf{v}$ med egenvärde $1/\lambda$.

Egenvärdena till en matris A är nollställena till den karakteristiska ekvationen

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Egenvärdena till en triangulär matris är lika med elementen på diagonalen.

Egenvektorer till olika egenvärden är linjärt oberoende.

En (kvadratisk) matris med k olika egenvärden har åtminstone k linjärt oberoende egenvektorer. Speciellt gäller att en $n \times n$ -matris med n olika egenvärden har n stycken linjärt oberoende egenvektorer som alltså utgör en bas för $\mathbb{R}^n$.

En symmetrisk (reell) matris har enbart reella egenvärden.

Antag att A är en symmetrisk $n \times n$ -matris. Då är egenvektorer $\mathbf{u}$ respektive $\mathbf{v}$ ortogonala om de hör till olika egenvärden μ respektive λ .

Spektralsatsen för symmetriska matriser: Antag att A är en $n \times n$ -matris. Då har A n stycken ortogonala egenvektorer om och endast om A är symmetrisk.

En $n \times n$ -matris A är diagonaliserbar om det finns inverterbar matris P och diagonal matris D sådana att

$$A = PDP^{-1}.$$

En $n \times n$ -matris A är diagonaliserbar $A = PDP^{-1}$ om och endast om den har n stycken linjärt oberoende egenvektorer. Elementen på diagonalen i D är egenvärdena till A och kolumnerna i P innehåller motsvarande egenvektorer. Till varje symmetrisk matris A finns det diagonal matris D och ON-matris P sådana att

$$A = PDP^t.$$

Om A är diagonaliserbar, $A = PDP^{-1}$, så gäller att också A^n är diagonaliserbar för $n \in \mathbb{N}$ och

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

Om A är inverterbar så är också A^n för negativa heltal n diagonaliserbar med samma formel. Speciellt är

$$A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}.$$