

Kapitel 8

Ex. 8.4 $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

a) Egenvärden & egenvektorer till A.

$$\boxed{Av = \lambda v} \leftarrow$$

$$Av - \lambda v = 0 \quad (A - \lambda I)v = 0$$

1) λ så att $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\left(\frac{1}{2} - \lambda \right) \left(\frac{1}{2} - \lambda \right) - \left(\frac{1}{4} \right) = 0$$

$$\cancel{\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}\lambda + \lambda^2 - \cancel{\frac{1}{4}} = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda - 1) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 0 \\ \lambda = 1 \end{array} \right.$$

2) $\lambda_1 = 0 \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\textcircled{2} \left[\begin{array}{cc|cc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow x + y = 0$$

$$x = -y \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix} = \cancel{y} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 1 \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 0 \Rightarrow x = y$$

$$\dots \dots \dots t \dots \dots$$

$$-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 0 \Rightarrow x = y$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

$$\lambda_1 = 0 \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1 \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$B = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_1, \lambda_1=0}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_2, \lambda_2=1} \right\}$$

8.4 b $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$v = (x, y) \quad \text{proj}_{v_2} v = \frac{(x, y) \cdot (1, 1)}{(1, 1) \cdot (1, 1)} (1, 1)$$

$$\text{proj}_{v_2} v = \frac{(x+y)}{(1+1)} (1, 1) =$$

A är matrisen
för ortogonala
projektion av $v=(x,y)$
mot $v_2=(1,1)$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{x+y}{2} \right) (1, 1) = \\ &= \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2} \right) = \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

8.6

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Alla egenvärden
alla egenvektorer

$$\boxed{Av = \lambda v} \Rightarrow (A - \lambda I)v = 0 \quad \det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ 1 & 3 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} &(-1-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda) + 0 + 0 \\ &- (0 + 0 + 0) = 0 \end{aligned} \quad \left\{ \Rightarrow \begin{aligned} \lambda_1 &= -1 \\ \lambda_2 &= 3 \\ \lambda_3 &= 2 \end{aligned} \right.$$

Egenvektorer..

Eigenvektoren:

$$\lambda_1 = -1$$

$$\begin{pmatrix} -1+1 & 0 & 0 \\ -2 & 3+1 & 0 \\ 1 & 3 & 2+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 1x + 3y + 3z = 0 \\ -2x + 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2x = 4y \\ \boxed{x = 2y} \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} (2y) + 3y + 3z &= 0 \\ 5y + 3z &= 0 \\ 3z &= -5y \\ \boxed{z = -\frac{5}{3}y} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ -\frac{5}{3}y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

$$t=1 \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix} \quad t=3 \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 3 \quad \begin{pmatrix} -1-3 & 0 & 0 \\ -2 & 3-3 & 0 \\ 1 & 3 & 2-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 1x + 3y - z = 0 \\ 1x \quad \quad \quad = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x=0} \quad \begin{aligned} 0 + 3y - z &= 0 \\ \boxed{z = 3y} \end{aligned} \quad \otimes$$

$$\otimes \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 3y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

$$\lambda_3 = 2 \quad \begin{pmatrix} -1-2 & 0 & 0 \\ -2 & 3-2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 2 \quad \begin{pmatrix} -1-2 & 0 & 0 \\ -2 & 3-2 & 0 \\ 1 & 3 & 2-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1-6 & 0 & | & 0 \\ -3 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$1x + 3y = 0 \quad \checkmark$$

$$-5y = 0$$

$$\boxed{-3x = 0}$$

$z = z$ fri parameter

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{z} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ egenvektor}$$

$$\lambda_1 = -1 \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 3 \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 2 \Rightarrow v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

8.7 $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{1000}$

$$\boxed{A = P D P^{-1}}$$

$$A^2 = (P D \underbrace{P^{-1} P}_I) = P D^2 P^{-1}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{A^n = P D^n P^{-1}}$$

$$D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}$$

1) Hitta egenvärden $\{\lambda_1, \lambda_2\}$

2) Hitta $P = \{v_1, v_2\}$ v_1, λ_1 ; v_2, λ_2 egenvektor bas

2) Hitta $P = \{v_1, v_2\}$ v_1, λ_1 ; $v_2 \leftrightarrow \lambda_2$ egenvektor bas

$$\det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\left(\frac{1}{2} - \lambda \right) \left(\frac{1}{2} - \lambda \right) - \left(+\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \right) = 0$$

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}\lambda + \lambda^2 - \frac{9}{4} = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} \quad \begin{matrix} \frac{1 + \sqrt{9}}{2} = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ \frac{1 - \sqrt{9}}{2} = \frac{1-3}{2} = -\frac{2}{2} = -1 \end{matrix}$$

$\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$ egenvärden

Egenvektor: $\boxed{\lambda_1 = 2} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - 2 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x + y = 0 \Rightarrow \boxed{x = -y}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix} = \cancel{y} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} + 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow R_2 + R_1 \quad \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x - y = 0 \Rightarrow x = y \Rightarrow$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix} = \cancel{y} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_1, \lambda_1=2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_2, \lambda_2=-1} \right\} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$A^n = P D^n P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} 2^n & \frac{1}{2} 2^n \\ \frac{1}{2} (-1)^n & \frac{1}{2} (-1)^n \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} 2^n + \frac{1}{2} (-1)^n & -\frac{1}{2} 2^n + \frac{1}{2} (-1)^n \\ -\frac{1}{2} 2^n + \frac{1}{2} (-1)^n & \frac{1}{2} 2^n + \frac{1}{2} (-1)^n \end{pmatrix}$$

8.9 $A = P D P^t \quad P = \text{ON-bas}$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$1) \det(A - \lambda I) = 0 \quad \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 3-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(5-\lambda)(3-\lambda)(4-\lambda) + 0 + 0$$

$$- \left(4(3-\lambda) + 4(5-\lambda) + 0 \right) = 0$$

$$(5-\lambda)(3-\lambda)(4-\lambda) - \left[12 - 4\lambda + 20 - 4\lambda \right] - [20 - 8\lambda]$$

$$(5-\lambda)(3-\lambda)(4-\lambda) - [12 - 4\lambda + 20 - 4\lambda] \\ - [32 - 8\lambda] \\ - 8[4-\lambda] = 0$$

$$(4-\lambda) [(5-\lambda)(3-\lambda) - 8] = 0$$

$$(4-\lambda) [15 - 5\lambda - 3\lambda + \lambda^2 - 8] = 0$$

$$(4-\lambda) [\lambda^2 - 8\lambda + 7] = 0$$

$$\boxed{\lambda = 4}$$

$$\lambda_1 = 7, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 4$$

$$D = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

ON-basis

$$\begin{cases} \|v_1\| = 1 \\ \|v_2\| = 1 \\ \|v_3\| = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} v_1 \perp v_2 \\ v_1 \perp v_3 \\ v_2 \perp v_3 \end{cases}$$

$$\lambda = 7 \quad \begin{pmatrix} 5-7 & 0 & 2 \\ 0 & 3-7 & -2 \\ 2 & -2 & 4-7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & -4 & -2 & | & 0 \\ 2 & -2 & -3 & | & 0 \end{pmatrix} \right] R_3 \leftarrow R_3 + R_1 \quad \left[\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & -4 & -2 & | & 0 \\ 0 & -2 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{matrix} +\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{matrix}$$

$$\rightarrow \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 2 & -1 & | & 0 \\ 0 & -2 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \right] R_3 \leftarrow R_3 + R_2 \quad \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 2 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \right] \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 1x + 1z = 0 \\ 2y + 1z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1x = -z \\ 2y = -z \Rightarrow y = -\frac{1}{2}z \\ z = t \end{cases}$$

$$\tilde{v}_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -\frac{1}{2}t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\|v_1\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$$

$$12 \quad 12$$

$$\underline{\underline{v_1}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1 \quad \begin{pmatrix} 5-1 & 0 & 2 \\ 0 & 3-1 & -2 \\ 2 & -2 & 4-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 2 & -2 & | & 0 \\ 2 & -2 & 3 & | & 0 \end{pmatrix} \quad R_3 \leftarrow R_3 - \frac{1}{2} R_1$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 2 & -2 & | & 0 \\ 0 & -2 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \quad R_3 \leftarrow R_3 + R_2$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 2 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} 4x + 2z &= 0 \\ 2y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

$$x = -\frac{1}{2}z$$

$$y = z$$

$$z = t$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t \\ t \\ t \end{pmatrix} = \cancel{t} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

$$\frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\lambda_3 = 4} \quad \begin{pmatrix} 5-4 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 3-4 & -2 & | & 0 \\ 2 & -2 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & -1 & -2 & | & 0 \\ 2 & -2 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-2) \\ \downarrow \end{matrix}$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & -1 & -2 & | & 0 \\ 0 & -2 & -4 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & -1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 1x + 1 + 2z = 0 & \Rightarrow x = -2z \\ -y - 2z = 0 & y = -2z \\ z = z = t \in \mathbb{R} & z = z \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{eller} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix})$$

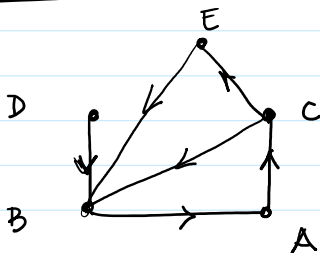
$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = P^t$$

Kapitel 9

Sidan 271

9.1



$R = (V, E)$ riktade

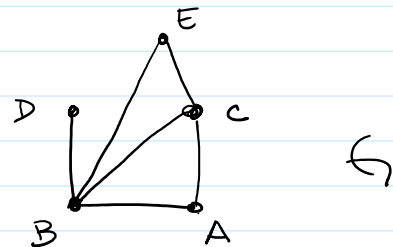
$$\Lambda = \Lambda(\mathbb{R}) \text{ grammatrisen}$$

$G = (V, E)$ underliggende grafer

$$\Delta_R = \begin{pmatrix} & A & B & C & D & E \\ X & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ B & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ D & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ E & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

G utan riktningen

$$A_G: \begin{matrix} & A & B & C & D & E \end{matrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{matrix} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} & & & & & & \end{matrix}$$

c) följsats 9.22 $\left\{ \begin{array}{l} G \text{ är sammanhängande} \\ R \text{ är starkt sammanhängande.} \end{array} \right.$

$$B = \sum_{k=1}^{(n)} A^{(k)} = A + A^2 + \dots + A^k \quad n = |V| \quad \underline{n=5}$$

$$R \Rightarrow A_R, A_R^2, A_R^3, A_R^4, A_R^5$$

$$A_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_R^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_R^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_R^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_R^5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = A_R + \dots + A_R^5 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matlab / octave A^n

Då är R inte sammanhängande
($B_{14} = B_{24} = B_{34} = B_{44} = B_{55} = 0$)

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow$$

$$A_G^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_G + A_G^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_G^3 = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 6 & 4 & 6 \\ 5 & 6 & 4 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = A_G + A_G^2 + A_G^3 + A_G^4 + A_G^5$$

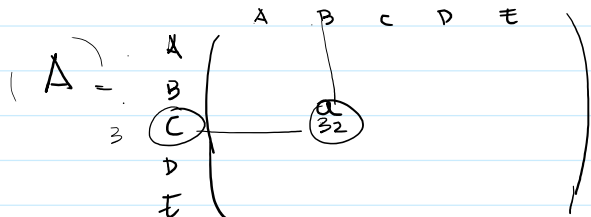
$b_{ij} > 0$ för $i=1 \dots 5$
 $j=1 \dots 5$

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$b_{ij} > 0 \text{ for } i=1 \dots 4, j=1 \dots 5$$

Så är G sammanhängande.

d) Hur många vägar av längd högst 3 det finns mellan nod C och nod B i grafen G .



$$A^2$$

$$A^3$$

$$A_{32}^{(1)} = 1 \quad A_{32}^{(2)} = 2 \quad A_{32}^{(3)} = 6$$

$$a_{32}^{(1)} + a_{32}^{(2)} + a_{32}^{(3)}$$

$$A_G^3 = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 6 & 4 & 6 \\ 5 & 6 & 4 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = A_G + A_G^2 + A_G^3$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 7 & 2 & 4 \\ 8 & 8 & 9 & 5 & 8 \\ 7 & 9 & 7 & 3 & 7 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 8 & 7 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

e)

$$R: B = A_R + A_R^2 + A_R^3 + A_R^4 + A_R^5$$

f) hur många vägar av längd högst 5 det finns

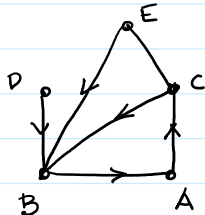
från C till nod B i riktade grafen R ?

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sidan 271

Uppgift 9.2

R :



$$A_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} d(A)=1 \\ d(B)=1 \\ d(C)=2 \\ d(D)=1 \\ d(E)=1 \end{matrix}$$

a) Ange övergångsmatrisen för slumpvandringen på R .

a) Ange övergångsmatrisen för slumpvandringen på R.

b) Bestäm den stationära fördelningen för slumpvandringen på R.

Lösning:

a) Def 9.24 M = övergångsmatrisen $M = [m_{ij}]$, $m_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sum_{k=1}^n a_{ik}} = \frac{a_{ij}}{d(v_i)}$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Def 9.31 x^t är en stationär fördelning till en slumpvandring med M om

$$x^t M = x^t$$

$$x^t M = x^t \Leftrightarrow (M^t x) = x \Leftrightarrow M^t x - I x = 0$$

$$\Leftrightarrow (M^t - I) x = 0 \quad x = \text{är egenvektor med } \lambda = 1 \text{ till } M^t. \quad (\text{transponat})$$

$$M^t - I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{Elementära} \\ \text{Radoperationer}}]{\substack{R_5 \leftarrow R_3 + R_1 \\ R_4 \leftrightarrow R_5}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + R_2}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{R_4 \leftrightarrow R_5}]{\substack{R_1 \leftarrow R_1 + R_3 \\ R_2 \leftarrow R_2 + R_3 \\ R_3 \leftarrow -2R_3 \\ R_4 \leftarrow R_4 + R_3}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4 \leftarrow -R_4}$$

$$\begin{bmatrix} R_1 \leftarrow R_1 - 2R_4 \\ R_2 \leftarrow R_2 - 2R_4 \\ R_3 \leftarrow R_3 + R_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{pivot}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$1x_1 - 2x_5 = 0$$

$$1x_2 - 2x_5 = 0$$

$$1x_3 - 2x_5 = 0$$

$$1x_4 = 0$$

$$x_1 = 2t$$

$$x_2 = 2t$$

$$x_3 = 2t$$

$$x_4 = 0$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

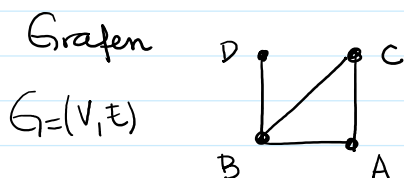
$$\begin{aligned} 1x_3 - 2x_5 &= 0 \\ 1x_4 &= 0 \\ x_5 &= t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= 2t \\ x_4 &= 0 \\ x_5 &= t \end{aligned} \rightarrow \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Men x måste ha summan av elementer lika med 1.

$$2 + 2 + 2 + 1 = 7 \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 2/7 \\ 2/7 \\ 2/7 \\ 0 \\ 1/7 \end{pmatrix} \text{ stationär fördelning till slumpvandring med övergångsmatrisen } M.$$

Sidan 272 Uppgift 9.3



- Ange grannmatrisen $A = A(G)$
- Ange övergångsmatrisen M för G .
- Bestäm den stationära fördelningen

$$a) \quad A = A(G) = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$d(A)=2$$

$$d(B)=3$$

$$d(C)=2$$

$$d(D)=1$$

grannmatrisen $A=(a_{ij})$

$$a_{ij}=1 \text{ om } \{v_i, v_j\} \in E$$

det finns en kant mellan nod i och nod j

$$b) \quad M = \text{övergångsmatrisen} \quad m_{ij} = \frac{a_{ij}}{d(v_i)}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) x^t Stationära fördelning :

$$\text{Obs: } M^{100} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.375 & 0.25 & 0.125 \\ 0.25 & 0.375 & 0.25 & 0.125 \\ 0.25 & 0.375 & 0.25 & 0.125 \\ 0.25 & 0.375 & 0.25 & 0.125 \end{bmatrix}$$

$$\text{och } M^{1000} = M^{100}$$

Def 9.31 x^t = stationär fördelning till slumpvandring med matrisen M

Def 9.31 $\pi^t \equiv$ stationär fördelning till slumpvandring med matrisen M

$$\pi^t M = \pi^t \iff (M^t) \pi = \pi \iff (M^t - I) \pi = 0$$

π är egenvektor med $\lambda=1$ till M^t .

$$M^t = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M^t - I = \begin{pmatrix} -1 & 1/3 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1/3 & -1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1/3 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -2/3 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/3 & -1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 \leftarrow R_2 + \frac{1}{2} R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 + \frac{1}{2} R_1 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 1/3 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 3/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & -3/4 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_3 \leftarrow R_3 + R_2 \end{matrix}$$

$$-\frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1/3 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 \leftarrow -R_1 \\ R_2 \leftarrow -R_2 \\ R_4 \leftrightarrow R_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/3 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -3/4 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 1x_1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 0 \\ \frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{4}x_3 = 0 \\ \frac{1}{3}x_2 - x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \frac{3}{4}x_3 = \frac{1}{2}x_2 \Rightarrow x_3 = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2}x_2 = \frac{2}{3}x_2 \\ x_4 = \frac{1}{3}x_2 \end{matrix} \quad \boxed{x_3 = \frac{2}{3}x_2}$$

Då $x_1 = \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{2}x_3$

$$x_1 = \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}x_2\right) = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right)x_2 = \frac{2}{3}x_2 \quad \boxed{x_1 = \frac{2}{3}x_2}$$

$$x_2 = t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}t \\ t \\ \frac{2}{3}t \\ \frac{1}{3}t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$t=3 \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{men } x \text{ behöver ha element vars}$$

$$t=3 \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{men } x \text{ behöver ha elementer vars summan är lika med 1}$$

$$\text{Da } x = \frac{1}{(2+3+2+1)} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/8 \\ 3/8 \\ 2/8 \\ 1/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,250 \\ 0,375 \\ 0,250 \\ 0,125 \end{pmatrix} \quad (*)$$

$$(*) M^{100} = M^{1000}$$

Raderna av M^{1000} är precis $x =$ stationära fördelningen $\square$

9.4 sidan 272

L = Landvetter kontoret
C = centralen kontoret

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} L & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} L \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,88 & 0,12 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

88% från L till L

12% från L till C

0,9 från C till C

0,1 från C till L

a) Hur stor andel av bilarna hör till L efter "lång tid", dvs var blir fördelning då tiden går till oändligheten?

Obs: $M^{1000} = \begin{pmatrix} 0,4545 & 0,5455 \\ 0,4545 & 0,5455 \end{pmatrix} \quad (*)$ Det är bra att verifiera resultaten

$$x^t M = x^t \Leftrightarrow (M^t x) = x \Leftrightarrow (M^t - I)x = 0$$

$$M^t = \begin{pmatrix} 0,88 & 0,1 \\ 0,12 & 0,9 \end{pmatrix} \quad M^t - I = \begin{pmatrix} 0,88-1 & 0,1 \\ 0,12 & 0,9-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,12 & 0,1 \\ 0,12 & -0,1 \end{pmatrix}$$

$$(M^t - I)x = 0 \quad \left(\begin{array}{cc|c} -0,12 & 0,1 & 0 \\ 0,12 & -0,1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -0,12 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$-0,12x_1 + 0,1x_2 = 0 \Rightarrow 0,12x = 0,1y \Rightarrow x = \frac{0,1}{0,12}y$$

$$x = \frac{10}{100} \cdot \frac{100}{12}y \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10/12t \\ 1t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 10/12 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \end{pmatrix} \quad \text{men } x+y=1$$

$$\text{Da } x = \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10/22 \\ 12/22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/11 \\ 6/11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4545 \\ 0,5455 \end{pmatrix} \quad (*)$$

9.4.b) Man vet att 70% av alla uthyrningar görs från L
hur stor andel av bilarna måste i slutet av varje vecka
flyttas mellan kontoren om man vill börja varje vecka
med 70% av bilarna på L.?

Lösning: $k = 1$ vecka $\Rightarrow$ Då $M^k = M^1 = M$ övergångsmatrisen

$x^t = (\underbrace{0,7}_L \quad \underbrace{0,3}_C)$ Så efter en vecka har vi

$$[0,7 \quad 0,3] \begin{bmatrix} 0,88 & 0,12 \\ 0,10 & 0,9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underbrace{0,6460}_L & \underbrace{0,3540}_C \end{bmatrix}$$

64,60% ska vara i Landvetter.

Då behöver vi flytta 5,4% av bilar till Landvetter
om vi vill börja nästa vecka med 70% av bilarna där.

9.5 Bestäm fördelningen av bilar på C = centralen
L = Landvetter U = uthyrda efter att den
stabiliserat sig.

Lösning: Vi vill bestämma $x^t \equiv$ stationär fördelningen.

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} C & L & U \end{matrix} \\ \begin{matrix} C \\ L \\ U \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,7 & 0,1 & 0,2 \\ 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad x^t = (x_1, x_2, x_3) \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$x^t M = x^t \Leftrightarrow M^t x = x \Leftrightarrow (M^t - I) x = 0$$

$$M^t = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,1 & 0,3 \\ 0,1 & 0,6 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix} \quad (M^t - I) = \begin{pmatrix} -0,3 & 0,1 & 0,3 \\ 0,1 & -0,4 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & -0,5 \end{pmatrix}$$

$$(M^t - I) = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow R_1 \leftrightarrow R_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 \leftarrow R_2 + 3R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & -11 & 9 \\ 0 & 11 & -9 \end{pmatrix} \leftarrow R_3 \leftarrow R_3 + R_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & +11 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad R_2 \leftarrow -R_2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 11x_2 - 9x_3 = 0 \\ x_3 = t \quad t \in \mathbb{R} \text{ fri parameter.} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow 11x_2 = 9x_3 \Rightarrow x_2 = \frac{9}{11}x_3 = \frac{9}{11}t \quad \boxed{x_2 = \frac{9}{11}t}$$

$$\boxed{x_3 = t}$$

$$1x_1 = 4x_2 - 2x_3$$

$$1x_1 = 4\left(\frac{9}{11}t\right) - 2t = \frac{(36-22)}{11}t = \frac{14}{11}t$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14/11 t \\ 9/11 t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 14 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

men $x_1 + x_2 + x_3$ måste vara lika med 1, då

$$x = \frac{1}{14+9+11} \begin{pmatrix} 14 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14/34 \\ 9/34 \\ 11/34 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4118 \\ 0,2647 \\ 0,3235 \end{pmatrix} \quad \text{Stationär fördelningsvektor} \quad \textcircled{*}$$

Och

$$M^{20} = M^{200} = M^{2000} = \begin{pmatrix} 0,4118 & 0,2647 & 0,3235 \\ 0,4118 & 0,2647 & 0,3235 \\ 0,4118 & 0,2647 & 0,3235 \end{pmatrix}$$

Extra uppgifter från Kapitel 8 och uppgift 9.6

kommer imorgon på en separat fil. $\square$