

8.12 sidan 249

$A_{n \times n}$ är konjugerad med $B_{n \times n} \iff$ det finns en inverterbar matris P sådant att $A = P B P^{-1}$

a) Visa att relationen "konjugerad med" är en ekvivalensrelation på mängden av alla $n \times n$ -matriser.

$$\mu_{n \times n} = \{ A_{n \times n}, A = [a_{ij}], a_{ij} \in \mathbb{R}; i, j = 1, \dots, n \}$$

Konjugerad med = Relation: Noterad som $\sim$

Att $\sim$ vara en ekvivalensrelation behöver vi visa att:

Reflexiva i) $A \sim A$, $A \in \mu_{n \times n}$

Symmetiska ii) $A \sim B \iff B \sim A$, för varje $A, B \in \mu_{n \times n}$

Transitiva iii) $A \sim B$ och $B \sim C \Rightarrow A \sim C$, för $A, B, C \in \mu_{n \times n}$.

Lösning:

Antag $A, B, C \in \mu_{n \times n}$ = mängd av alla $n \times n$ matriser

i) Att visa att $A \sim A$ behöver vi visa att A är konjugerad med A .

Att vara "konjugerad med" behöver vi hitta en inverterbar matris P så att $A = P A P^{-1}$

Men när $P = I \in \mu_{n \times n}$, I = identitet matris. Då har vi att $A = I \cdot A \cdot I^{-1} \Rightarrow \underline{A \sim A}$

ii) Antag nu att $A \sim B$ (Det finns $P \in \mu_{n \times n}$ sådant att $A = P B P^{-1}$)
 P inverterbar

Vi vill visa att $B \sim A$.

Att vara $B \sim A$, behöver vi hitta $Q \in \mu_{n \times n}$ inverterbar sådant att $B = Q A Q^{-1}$

Enligt våra hypotes

$$A = P B P^{-1} \Rightarrow P^{-1} A = \underbrace{P^{-1} P}_{I} B P^{-1} \Rightarrow$$

$$P^{-1} A = B \cdot P^{-1} \Rightarrow \underbrace{P^{-1} A P}_{B} = B \underbrace{P^{-1} P}_I \Rightarrow$$

$$\underbrace{P^{-1} A P}_{B \cdot I} = B, \text{ då finns det } Q = P^{-1} \text{ inverterbar}$$

$$\text{sådan att } B = Q A Q^{-1} \quad (Q^{-1} = (P^{-1})^{-1} = P)$$

Däremot $B \sim A$.

iii) $A \sim B$ och $B \sim C \Rightarrow A \sim C$

$$A \sim B \Leftrightarrow \text{Det finns } P \text{ inverterbar sådant } A = P B P^{-1}$$

$$B \sim C \Leftrightarrow \text{Det finns } K \text{ inverterbar sådant } B = K C K^{-1}$$

$$A = P B P^{-1}, \text{ men } B = K C K^{-1},$$

då kan man skriva så där:

$$A = P (K C K^{-1}) P^{-1} \stackrel{\text{produkter av } n \times n \text{ matriser är}}{=} \text{associativt}$$

$$A = (P \cdot K) C (K^{-1} \cdot P^{-1}) \quad \text{men } (P \cdot K)^{-1} = K^{-1} \cdot P^{-1}$$

$$\text{Då finns det en } n \times n \text{ matris } S = P \cdot K,$$

$$S \text{ också inverterbar} \quad S^{-1} = (P \cdot K)^{-1} = K^{-1} \cdot P^{-1}$$

$$\text{sådan att } A = S \cdot C \cdot S^{-1}$$

$$\text{däremot } A \sim C.$$

$$\text{Då har vi: } A \sim B \text{ och } B \sim C \Rightarrow A \sim C.$$

Med de Tre villkoren är Relationen "konjugerad med" en ekvivalensrelation. $\square$

8.12. b) Visa att 2 matriser som är konjugerade med varandra har samma egenvärden.

$$\text{Antag } A \sim B \Leftrightarrow \text{Det finns } P \text{ inverterbar sådant att } A = P B P^{-1}$$

$$\text{Då } A \sim B \Leftrightarrow A = P B P^{-1} \Leftrightarrow A P = P B$$

Vi ska visa att egenvärden av B är också egenvärden av A .

Antag nu att λ är egenvärde av B med w som motsvarande egenvektor: $Bw = \lambda w$.

$$\text{Nu } (AP)w = (PB)w \Rightarrow$$

$$(AP)(w) = P(Bw) \Rightarrow$$

$$(AP)(w) = P(\lambda w) = \lambda P(w) \Rightarrow$$

$$A(Pw) = \lambda(Pw) \quad \text{sätt } (Pw) = v \text{ då har vi}$$

$$\boxed{Av = \lambda v} \quad \text{så } \lambda \text{ är också egenvärde till } A \\ \text{med motsvarande egenvektor } v = (Pw).$$

Hur $A \sim B \Leftrightarrow B \sim A$ kan vi visa att en egenvärde till A är också egenvärde till B .

Då A och B har samma egenvärde när de är konjugerade. $\square$

8.17 sidan 250

$$\text{Sätt } \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1; v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Bestäm $A_{3 \times 3}$ så att $Av_i = \lambda_i v_i, i=1,2,3$.

b) Om man sätter $v_1 = (2, 2, -8)$ istället så finns det ingen matris med de givna egenvärdena och egenvektorerna. Vår för inte?

Lösning:

a) $A_{3 \times 3}$ med $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tre olika egenvärden med tre oberoende motsvarande egenvektorer

då är A diagonaliserbar och då skrivs A som

$$A = P D P^{-1}, \quad D = \text{diagonal matris} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{och } P = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$$

Vi observerar att $u_1 \cdot u_2 = 0$, $u_1 \cdot u_3 = 0$, $u_2 \cdot u_3 = 0$

Då alla egenvektorer är ortogonala.

När man väljer $\tilde{u}_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$, $\tilde{u}_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|}$, $\tilde{u}_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|}$

de motsvarande enhetsvektorer, då har man $\{\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3\}$ ON-bas och P en ortogonal matris med $P^{-1} = P^t$.

Därmed $A = P \cdot D \cdot P^t$, $P = \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 & \tilde{u}_2 & \tilde{u}_3 \\ | & | & | \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\tilde{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{4+4+1}} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \quad \tilde{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{4+1+4}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{1+4+4}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}}_P \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_D \underbrace{\begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix}}_{P^t}$$

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \left[\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \right]$$

$$A = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 11 & 8 & -2 \\ 8 & 5 & 10 \\ -2 & 10 & 2 \end{pmatrix} \quad A \text{ är symmetrisk,} \\ \text{(och det visste vi enligt Satsen 8.14)}$$

8.17.b) $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$ 3 olika egenvärden

Enligt Satsen 8.14: Egenvektorer till olika egenvärden är linjärt oberoende.

Är $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ linjärt oberoende?

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -8 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \leftarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 + 4R_1}} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -6 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + 2R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

en fri kolumn $\Rightarrow$ 1 fri parameter $\Rightarrow$

$\alpha \tilde{v}_1 + \beta \tilde{v}_2 + \gamma \tilde{v}_3 = 0$ har oändliga lösningar

då är $\{\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3\}$ linjärt Beroende

1) Då matrisen $\tilde{P} = [\tilde{v}_1 \ \tilde{v}_2 \ \tilde{v}_3] = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ är ej inverterbar

2) Då kan man inte få en matris A lika med $\tilde{P} D \tilde{P}^{-1}$.

8.18 Normen av en matris $A: \|A\|$
 $n \times n$

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{ij})^2}$$

$A_{2 \times 2}$ med $A v_1 = \lambda_1 v_1$ och $A v_2 = \lambda_2 v_2$

Antag att $|\lambda_1| < 1$, $|\lambda_2| < 1$. Bevisa att i så fall är

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\| = 0.$$

Lösning:

1) $A_{2 \times 2}$ med 2 olika egenvärden $\Rightarrow$ det finns en bas P med de motsvarande egenvektorer

och A är diagonaliserbar: Då $A = P D P^{-1}$

2) Enligt Proposition 8.24 gäller att A^n är också diagonaliserbar

$$\text{och } A^n = P D^n P^{-1}$$

$$\text{Antag } P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad P^{-1} = \frac{1}{\det P} \begin{bmatrix} u_2 & -u_1 \\ -v_2 & v_1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Då } A^n = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix} \left(\frac{1}{\det P} \right) \begin{bmatrix} u_2 & -u_1 \\ -v_2 & v_1 \end{bmatrix}$$

$$A^n = \frac{1}{\det P} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^n u_2 & -\lambda_1^n u_1 \\ \lambda_2^n v_2 & -\lambda_2^n v_1 \end{bmatrix}$$

$$A^n = \frac{1}{\det P} \begin{bmatrix} v_1 & k_1 \\ v_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^n k_2 & -\lambda_1^n k_1 \\ -\lambda_2^n v_2 & \lambda_2^n v_1 \end{bmatrix}$$

$$A^n = \frac{1}{\det P} \begin{bmatrix} v_1 k_2 \lambda_1^n - k_1 v_2 \lambda_2^n & -k_1 v_1 \lambda_1^n + k_1 v_1 \lambda_2^n \\ v_2 k_2 \lambda_1^n - k_2 v_2 \lambda_2^n & -k_1 v_2 \lambda_1^n + v_1 k_2 \lambda_2^n \end{bmatrix}$$

$$\|A^n\| = \frac{1}{\det P} \sqrt{(v_1 k_2 \lambda_1^n - k_1 v_2 \lambda_2^n)^2 + (-k_1 v_1)^2 (\lambda_1^n - \lambda_2^n)^2 + (v_2 k_2)^2 (\lambda_1^n - \lambda_2^n)^2 + (v_1 k_2 \lambda_2^n - k_1 v_2 \lambda_1^n)^2}$$

$$|\lambda_1| < 1, \quad |\lambda_2| < 1$$

$$\text{då } \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_1^n \rightarrow 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_2^n \rightarrow 0$$

Eftersom alla termer of A^n beror på λ_1^n, λ_2^n eller

$(\lambda_1^n - \lambda_2^n)^2$, har vi alla termer i summan att

räkna $\|A^n\|$ också beroende på λ_1^n, λ_2^n eller $(\lambda_1^n - \lambda_2^n)^2$

da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\| = \frac{1}{\det P} \sqrt{0} = 0 //$$