Gamla_tenta_2011

den 11 mars 2021 07:36

mar11

**MATEMATIK**
**Chalmers Tekniska Högskola**
**Tentamen i Linjär algebra IT, TMV206, 2011-03-17.**
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Urban Larsson, 0703-088304.

---

**OBS:** Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng inte svaret.
För betyget 3 krävs minst 25 poäng sammanlagt, för 4 krävs 35 poäng och för 5 krävs 45 poäng inklusive bonuspoäng.

---

1. Beräkna vinkeln mellan vektorerna

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ange också (med motivering) om vinkeln är spetsig, trubbig eller rät. (6p)

$u \cdot v = \|u\| . \|v\| \cos\theta$

$\theta = \measuredangle(u, v)$

$\theta = 90 \Rightarrow \cos\theta = 0$

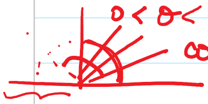
$\cos\theta = \dfrac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|}$

$\|u\| = \sqrt{9+4+4}$

$\|v\| = \sqrt{1+9+9}$

$0 < \theta < 90$

$\cos\theta > 0$



$\cos\theta < 0$

$90^\circ < \theta < 180^\circ$

2. Bestäm matrisen (i standardbasen) för den linjära avbildning i planet som består av spegling i linjen $y = -x$ följt av rotation $\pi/4$ radianer *moturs*. (6p)

3. Vi definierar tre vektorer

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ a \\ -a \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1-a \end{pmatrix}.$$

(a) Bestäm alla värden på parametern $a$ för vilka de tre vektorerna är linjärt beroende.

(b) Skriv en av vektorerna som en linjärkombination av de andra i alla fall då de tre vektorerna är linjärt beroende. (8p)

4. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till $A$.

(b) Beräkna $A^n$ för godtyckligt heltal $n$. (8p)

5. Låt $P = (1, 3, 7)$, $Q = (2, 0, 4)$ och $R = (5, 4, 1)$.

(a) Bestäm ekvationen på normalform för planet $\pi$ som innehåller punkterna $P$, $Q$ och $R$.

(b) Bestäm minsta avståndet från origo till planet $\pi$. (6p)

Var god vänd!

6. Betrakta Markovkedjan med övergångsmatris

$$M = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestäm den stationära fördelningen för denna Markovkedja. (6p)

7. Låt $\pi$ vara ett plan i rummet genom origo och låt $\mathbf{v}$ vara en vektor som inte ligger i $\pi$. För varje vektor $\mathbf{x}$ finns det en unik vektor $f(\mathbf{x})$ som uppfyller

- $f(\mathbf{x})$ ligger i planet $\pi$
- $f(\mathbf{x}) - \mathbf{x} = c\mathbf{v}$ för något $c \in \mathbb{R}$

Vi kallar $f(\mathbf{x})$ för projektionen av $\mathbf{x}$ på $\pi$ längs riktningen $\mathbf{v}$ och detta ger en avbildning $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ som beror på $\mathbf{v}$ och $\pi$.

(a) Visa att $f$ är en linjär avbildning.

(b) Ge alla egenvärden och egenvektorer för matrisen (i standardbasen) för $f$.

(c) Bestäm matrisen för $f$ i standardbasen om $\pi$ är $xy$-planet (d v s $z = 0$) och $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}^t$ med $c \neq 0$.

Observera att det går att lösa deluppgifterna helt oberoende av varandra. (10p)

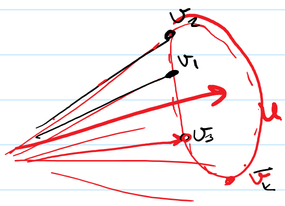
Tentorna beräknas vara färdigrättade den 31 mars. De kommer att delas ut vid lämpligt tillfälle som meddelas på kursens hemsida. Efter det kan tentorna avhämtas på expeditionen för Matematiska vetenskaper mellan 8:30 och 13:00 varje vardag.

LYCKA TILL! Stefan.

given koordinaterna av vektorerna, då är det direkt att räkna vinkeln mellan vektorerna.

1) $\left.\begin{array}{l} u \in \mathbb{R}^3 \\ v \in \mathbb{R}^3 \end{array}\right\} \theta = \measuredangle(u, v)$

1.2)

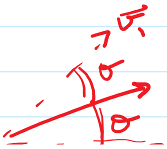



När man har 1 vektor $(\bar{u})$ och vinkeln $\theta = \pi/4$

? $v \in \mathbb{R}^3$ ? så att $\measuredangle(u, v) = \pi/4$

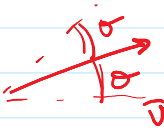
Det finns i $\mathbb{R}^3$ oändliga många vektorer $v$ som har

i $\mathbb{R}^2$




$u \in \mathbb{R}^2$

i $\mathbb{R}^2$ har man 2 olika vektorer $v_1$ och $v_2$ så att $\measuredangle(u, v_i) = \theta$ = given,



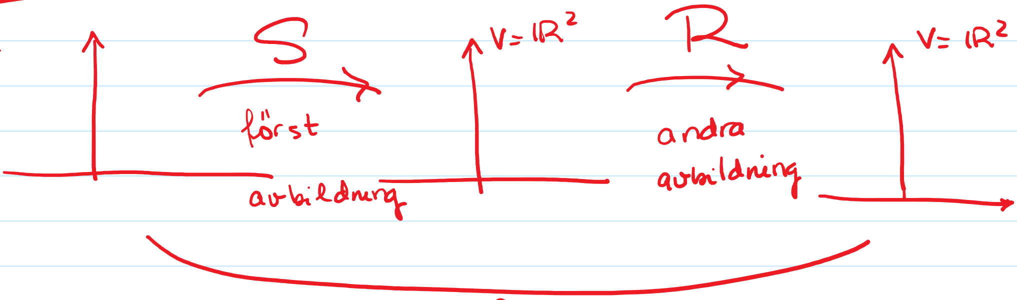
$u \in \mathbb{R}^n$

i $\mathbb{R}^n$ oändliga många vektorer $v$ som har samma vinkel med $\vec{u}$.

1. $(-3,-2,2)\cdot(1,3,3) = -3-6+6 = -3 < 0$

$90^\circ < \theta < 180^\circ$

2) $V=\mathbb{R}^2 \xrightarrow[\text{först avbildning}]{S} V=\mathbb{R}^2 \xrightarrow[\text{andra avbildning}]{R} V=\mathbb{R}^2$

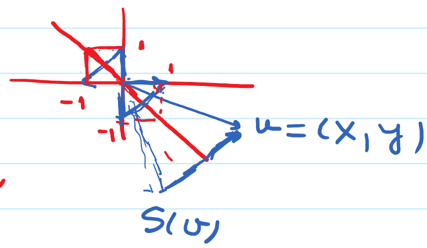


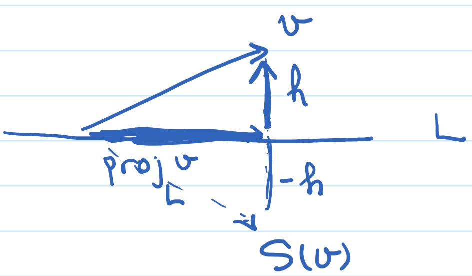
$f$

$$f(x) = (\underset{\text{andra}}{R} \circ \underset{\text{först}}{S})(x) = (\underbrace{R}_{\text{Rotation}} \cdot \underbrace{S}_{\text{Speglingen}})(x)$$

Speglingen i linjen $y=-x$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$





$v = \text{proj}_L v + h$

$h = v - \text{proj}_L v$

Då

$S(v) = \text{proj}_L v - v + \text{proj}_L v$

$$\boxed{S(v) = 2\,\text{proj}_L v - v}$$

$v = (x, y)$

$$\text{proj}_L v = \frac{(x,y)\cdot(1,-1)}{(1,-1)(1,-1)}(1,-1) =$$

$$= \frac{(x-y)}{2}(1,-1)$$

$$S(x,y) = \cancel{2}\frac{(x-y)}{\cancel{2}}(1,-1) - (x,y)$$

$$= (x-y, y-x) - (x,y)$$

$$S(x,y) = (-y, -x)$$

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ S(\bar{e}_1) & S(\bar{e}_2) \end{array} & \end{array}$$

$$S(x,y) = S(xe_1 + ye_2) = xS(e_1) + yS(e_2)$$

$$\begin{bmatrix} S(e_1) & S(e_2) \\ & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

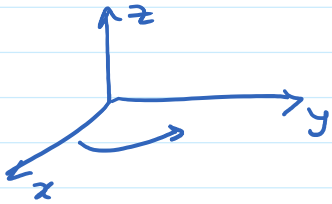
$$R_{\theta=\pi/4}(v) = \begin{bmatrix} \cos\pi/4 & -\sin\pi/4 \\ \sin\pi/4 & \cos\pi/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} R \cdot S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

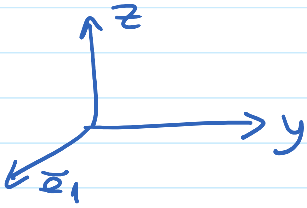
$$= \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

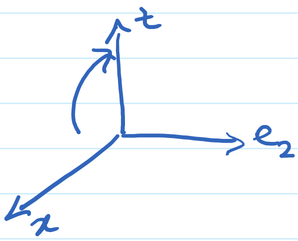
Obs: $R$ i $\mathbb{R}^3$




$$\begin{bmatrix} R_{xy} & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

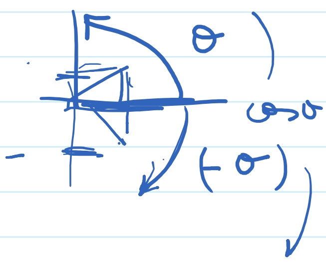



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R_{yz} & \\ 0 & & \end{bmatrix}$$




$$\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Rotation medurs
då är vinkel
lika med $(-\theta)$




$$\begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & +\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

3. $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ a \\ -a \end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1-a \end{pmatrix}$

$\{v_1, v_2, v_3\}$ linjärt beroende om

$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$ med oändliga lösningar för $\alpha, \beta, \gamma$.

$\Lambda$ $\underbrace{\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}$ med oändliga lösningar.

$\begin{cases} \det A = 0 \\ \text{eller} \quad \text{gauss elimination} \Rightarrow \text{trappstegform av } A \text{ har en fri kolumn.} \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 2 & a & -1 \\ \end{bmatrix}$$

Pivot

$R_2 \leftarrow R_2 - \frac{2}{3} R_1$

$$\begin{bmatrix} 2 & a & -1 \\ 1 & -a & 1-a \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} R_2 \leftarrow R_2 - \frac{2}{3} R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - \frac{1}{3} R_1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 0 & a + \frac{2}{\cancel{3}}(\cancel{+3}) & -1 - \frac{2}{3}(0) \\ 0 & -a + \frac{1}{\cancel{3}}(\cancel{+3}) & (1-a) - \frac{1}{3}(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 0 & a+2 & -1 \\ 0 & \underbrace{-a+1} & 1-a \end{bmatrix} \quad R_3 \leftarrow R_3 - \frac{(-a+1)}{(a+2)} R_2$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 0 & a+2 & -1 \\ 0 & 0 & \underbrace{(1-a) + \frac{(-a+1)}{(a+2)}(+1)}_{=0} \end{bmatrix}$$

Att $\{v_1\ v_2\ v_3\}$ vara linjärt Beroende, $(\det A = 0)$

behöver vi ha

$$(1-a) + \frac{(-a+1)}{(a+2)} = 0$$

$$(1-a)(a+2) + (1-a) = 0$$

$$(1-a)(a+2+1) = 0$$

$$(1-a)(a+3) = 0$$

$$(1-a) = 0 \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

eller

$$(a+3) = 0 \Rightarrow \boxed{a = -3}$$

---

$\boxed{a=1}$ $\quad v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\boxed{a=1}$ $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1-1 \end{pmatrix}$

$$\alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} R_1 \leftarrow \frac{1}{3} R_1 \\ R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - R_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad - R_2 \leftarrow \frac{1}{2} R_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$1\alpha + 0 + \left(-\tfrac{1}{3}\gamma\right) = 0 \implies \alpha = \tfrac{1}{3} t$$

$$1\beta + -\tfrac{1}{3}\gamma = 0 \implies \beta = \tfrac{1}{3} t$$

$$\gamma = t \in \mathbb{R}$$

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$$

$$\frac{1}{3} v_1 + \frac{1}{3} v_2 + v_3 = 0 \implies$$

$$\boxed{v_3 = -\frac{1}{3} v_1 - \frac{1}{3} v_2}$$

4) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ $A^n = ?$ $\boxed{A = PDP^{-1}}$ $\boxed{A^n = PD^nP^{-1}}$

4.a) egenvärden och egenvektorer:

$$\boxed{Av = \lambda \cdot v} \iff (A - \lambda I)v = 0$$

$$\boxed{Av = \lambda \cdot v} \iff (A - \lambda I)v = 0$$

1) $\boxed{\det(A - \lambda I) = 0}$

$$\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -2 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0 \implies (3-\lambda)(2-\lambda) - 2 = 0$$

$$6 - 3\lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 2 = 0$$

$$\boxed{\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4.1.4}}{2} \begin{cases} \frac{5+\sqrt{9}}{2} = \frac{5+3}{2} = \underline{4} \\ \frac{5-\sqrt{9}}{2} = \frac{5-3}{2} = \underline{1} \end{cases}$$

$\boxed{\lambda_1 = 4}$, $\boxed{\lambda_2 = 1}$

4b) egenvektor med $\underline{\lambda_1 = 4}$ $\quad Av = 4v \iff (A - 4I)v = 0$

$$\begin{pmatrix} 3-4 & -1 \\ -2 & 2-4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \implies -x - y = 0$$

$$\boxed{x = -y}$$

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix} = \overset{t}{\cancel{y}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R} \quad \boxed{v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \lambda_1 = 4}$$

4b2) egenvektor med $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 3-1 & -1 \\ -2 & 2-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \implies$$

$$2x - y = 0 \implies \boxed{2x = y}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} = \overset{t}{\cancel{x}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = 1}$$

4.2) $A = P D P^{-1}$

$P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}$ $\quad P^{-1}$

$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^{-1} \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \left(-\frac{1}{3}\right) \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det P = (-2) - 1 = -3$$

$$A = \left(-\frac{1}{3}\right) \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^n = \left(-\frac{1}{3}\right) \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & 1^n \end{bmatrix}} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}$$

$\vdots$

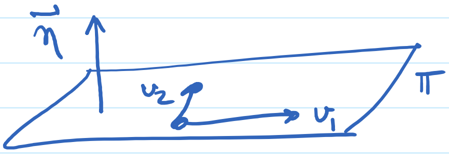
$A^n =$

Räkningen finns i facit.

5) $P = (1,3,7)$, $Q = (2,0,4)$, $R = (5,4,1)$

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (1,-3,-3) = v_1$$

$$\overrightarrow{QR} = R - Q = (3,4,-3) = v_2$$

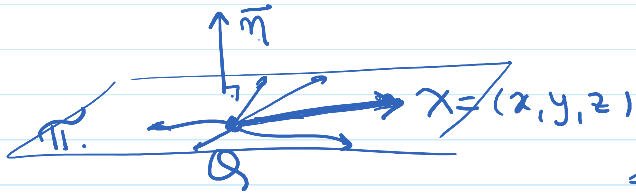



$$\bar{n} = v_1 \times v_2$$

$$\bar{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -3 & -3 \\ \dots \end{vmatrix} = i \underbrace{\left[+9+12\right]}_{21} - j \underbrace{\left[-3+9\right]}_{} + \dots$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 3 & 4 & -3 \end{vmatrix} = i\,[\underbrace{+9+12}_{21}] - j\,[\underbrace{-3+9}_{+6}] + k\,[4+9] =$$

$\bar{n} = (21, -6, 13)$ normal vektor till alla vektorer som ligger i planet $\pi$.




$\overline{QX} = X - Q$

$= (x,y,z) - (2,0,4)$

$= (x-2,\ y-0,\ z-4)$

$$\boxed{\vec{n} \cdot \overline{QX} = 0}$$

($X$ = godtyckliga punkt i planet $\pi$)
$\overline{QX}$ = vektorer som skapas med $X$ och $Q$.

$(21, -6, 13) \cdot (x-2,\ y-0,\ z-4) = 0$

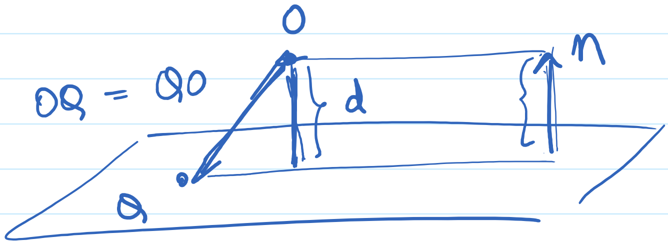
$21(x-2) - 6(y-0) + 13(z-4) = 0$

$21x - 6y + 13z \underbrace{-21(2) - 6(0) - 4(13)} = 0$

$$\boxed{21x - 6y + 13z - 94 = 0}$$

$\pi$: ekvation på normal form

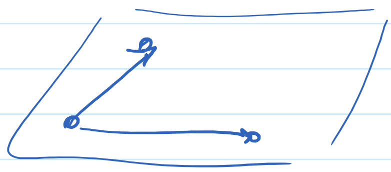
5(b)

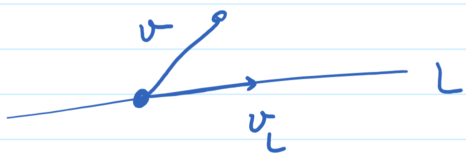



$O = (0,0,0) \notin \pi$

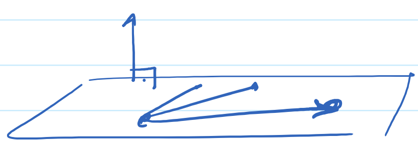
$d(O, \pi) = \| \mathrm{proj}_{n}\, QO \|$

Komentär:

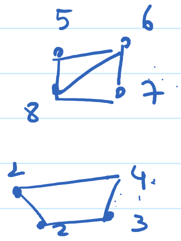





$\bar{n}$



## 6) Markovkedjan



$$M = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$G = (V, E)$

Stationär fördelning $= x^t$ så att

$$\boxed{x^t M = x^t} \iff (M^t x) = x$$

$$\boxed{M^t x = 1\,x}$$

$x$ är egenvektor med $\lambda = 1$ av matris $M^t$.

$$(M^t - 1I)x = 0$$

Obs $\bar{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\boxed{x+y+z=1}$$

$$\begin{pmatrix} 2/12 - 1 & 3/12 & 5/12 \\ 5/12 & 4/12 - 1 & 6/12 \\ 5/12 & 5/12 & 1/12 - 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{12}\begin{pmatrix} -10 & 3 & 5 \\ 5 & -8 & 6 \\ 5 & 5 & -11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad R_1 \leftrightarrow R_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -8 & 6 & 0 \\ -10 & 3 & 5 & 0 \\ 5 & 5 & -11 & 0 \end{array}\right)$$

Pivot

$R_2 \leftarrow R_2 + 2R_1$

$R_3 \leftarrow R_3 - R_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -8 & 6 & 0 \\ 0 & 3-16 & 5+12 & 0 \\ 0 & 5+8 & -11-6 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -8 & 6 & 0 \\ 0 & -13 & 17 & 0 \\ 0 & 13 & -17 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -8 & 6 & 0 \\ 0 & -13 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$5x - 8y + 6z = 0$

$-13y + 17z = 0 \Rightarrow$

$13y = 17z$

$$\boxed{y = \frac{17}{13} z}$$

$$5x = 8y - 6z$$

$$x = \frac{1}{5}\left(8 \cdot \left(\frac{17}{13}\right) z - 6z\right)$$

$$x = \frac{1}{5}\left(\frac{8.17 - 6.13}{13}\right) z$$

$$\boxed{x = \frac{1}{5} \frac{58}{13} z}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{5}\frac{58}{13} z \\ y = \frac{17}{13} z \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \underbrace{\begin{pmatrix} 58/5 \\ 17 \\ 13 \end{pmatrix}}, \; t \in \mathbb{R}$$

z är fri parameter

$\boxed{z = 13t}$ Då kan man välja $t = 1$

Normalisera $x$ : $\boxed{\frac{58}{5} + 17 + 13 = \frac{208}{5}}$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{58}{208} \\ \frac{17.5}{208} \\ \frac{13.5}{208} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58/208 \\ 85/208 \\ 65/208 \end{pmatrix}$$

Och här normaliserar vi vektor $x$.

$X$ = Stationär fördelning

---

7 $\Pi$ : plan i rummet ($\in \mathbb{R}^3$) genom origo.

$$v \notin \Pi \qquad v = (a, b, c)^t = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$v \notin \Pi \qquad v = (a, b, c) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

viktig information

$x \to \underline{f(x)}$ ligger i planet $\Pi$ $\boxed{\text{och är } \underline{\text{unik}}}$

och

$$f(x) - x = \alpha v, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

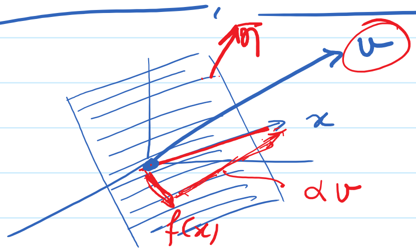
a) visa att $f$ är linjär avbildning

b) hitta egenvektorer och egenvärden

c) $f$ när $\Pi_{xy}$; $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ $\underline{c \neq 0}$

---

a)



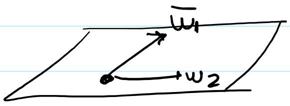

$\bar{n} \neq \alpha v$

Att visa att $f$ är linjär, behöver vi visar att för godtyckliga

$x, y \in \mathbb{R}^3$ ai) $f(x+y) = f(x) + f(y)$

$k \in \mathbb{R}$ aii) $f(kx) = k f(x)$

Obs:




$\Pi$ är genom origo $\quad \begin{matrix} w_1 \in \Pi \\ w_2 \in \Pi \end{matrix} \Rightarrow w_1 + w_2 \in \Pi.$

$$\Pi: \alpha x + \beta y + \gamma z = 0$$

ai) $f(x+y) = \begin{cases} \boxed{f(x+y) \in \Pi} \\ f(x+y) - (x+y) = c_3 v \iff \underbrace{f(x+y) = c_3 v + (x+y)} \end{cases}$

Men $\boxed{f(x+y) \in \Pi}$

$\left.\begin{matrix} x = (x_1, x_2, x_3) \\ y = (y_1, y_2, y_3) \end{matrix}\right\rangle x + y = \boxed{(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)}$

$f(x) \in \Pi \qquad f(y) \in \Pi$

$$\left[\begin{array}{l} f(x) \in \Pi \\ f(x) - x = c_1 v \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} f(y) \in \Pi \\ f(y) - y = c_2 v \end{array}\right.$$

$$f(x) + f(y) \in \Pi$$

$$f(x) - x = c_1 v$$

$$f(y) - y = c_2 v$$

$$f(x) + f(y) - (x+y) = (c_1 + c_2) v$$

Enligt unicitát

$$f(x) + f(y) = \underbrace{(c_1 + c_2) v}_{} + (x+y) = c_3 v + (x+y)$$

$$= f(x+y)$$

aii)

$$\left.\begin{array}{l} x \in \mathbb{R}^3 \\ k \in \mathbb{R} \end{array}\right\} (kx)$$

$$f(kx) = \left\{\begin{array}{l} \in \Pi \\ f(kx) - (kx) = \alpha v \end{array}\right.$$

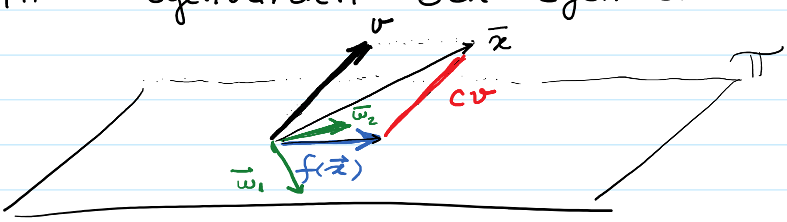
$$f(kx) = \alpha v + kx$$

$$= k\left(\frac{\alpha}{k} v + x\right) =$$

$$\boxed{c = \frac{\alpha}{k}}$$

$$= k f(x)$$

b) Hitta egenvärden och egenvektorer




Planet $\Pi$ är spänned med 2 linjärt oberoende vektorer som ligger i $\Pi$. till exempel $\vec{w}_1$ och $\vec{w}_2$.

till exempel $\vec{w_1}$ och $\vec{w_2}$.

i) $f(w_1) = w_1$ ; om $w_1 \in \Pi$

$f(w_2) = w_2$ ; om $w_2 \in \Pi$

Kommer ihåg att $v \notin \Pi$. Så, den endast möjlighet man har är sätta $k=0$

ii) $f(v) - v = cv$

$$\underbrace{f(v) = cv + v = (c+1)v = kv}$$

$$k = 0$$

Då har vi

$$\begin{array}{ccc} w_1 & w_2 & v \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \lambda=1 & \lambda=1 & \lambda=0 \end{array}$$

är egenvektorer med motsvarande egenvärden

---

Då $\boxed{[f(\vec{x})]_P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix}$

Koordinater av Bilden av $\vec{x}$ i bas P.

$$\begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ f(w_1) & f(w_2) & f(v) & \underbrace{\phantom{xx}}[x]_P \end{array}$$

$P = \{w_1, w_2, v\}$ är en bas för $\mathbb{R}^3$.

och $x \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow$

$x = t_1 w_1 + t_2 w_2 + t_3 v$.

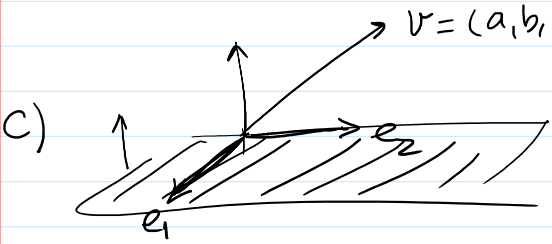
$[x]_P = [t_1, t_2, t_3]_P \equiv$ koordinater på bas P.

Då

$[f(x)]_P = t_1 f(w_1) + t_2 f(w_2) + t_3 f(v)$

$= \begin{bmatrix} f(w_1) & f(w_2) & f(v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix}$

c)




$\Pi_{xy} : z = 0$

Här ska vi använda en speciellt plan att konstruera matrise.

$f(x) \in \Pi \Rightarrow f(x) = (\alpha, \beta, \underline{\underline{0}}) = \alpha e_1 + \beta e_2 + 0\vec{e_3}$

= måste har 0 som tredje koordinat.

att skapa bild av f, behöver vi också (*):

(*) $f(x) - x = k(a,b,c)$ och den andra egenskap tillåtler oss att bestäma $\alpha$ och $\beta$.

$(\alpha, \beta, 0) - (x,y,z) = k\underbrace{(a,b,c)}_{\text{given}}$

given $\vec{v} = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} \alpha - x = ka \\ \beta - y = kb \\ 0 - z = kc \end{cases} \Rightarrow k = -\frac{z}{c}$$

$\alpha = x - \frac{a}{c} z$

$$\begin{cases} \alpha = x - \frac{a}{c} z \\ \beta = y - \frac{b}{c} z \\ z = z \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a/c \\ 0 & 1 & -b/c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(e_1) & f(e_2) & f(v) \end{array} \end{array}$$

Den här är matrisen av $f$ i <u>standard bas</u>.