Tentamen
MVE470, Flervariabelanalys, K/Kf/Bt

2019-03-22 , 14.00 - 18.00

Examinator: Thomas Wernstål , Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Olof Elias , telefon: 5325

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ej räknedosa

För godkänt på tentamen krävs minst 23 poäng sammanlagt på tentamens båda delar (Godkäntdelen och Överbetygsdelen), inklusive eventuella bonuspoäng från duggor 2019.

För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens båda delar, inklusive eventuella bonuspoäng.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. (10p)
Lösgör bladet och lämna in det som blad 1 tillsammans med övriga lösningar.

2. (a) Förklara varför funktionen $f(x,y) = x^5y^3$ har ett största värde för de (x,y) som ligger på linjen $x+y=8$ dvs att $\max\limits_{x+y=8} f(x,y)$ existerar (1p)

(b) Använd Lagrange multiplikatormetod för att bestämma det största värdet i deluppgift (a) dvs. maximum av x^5y^3 under bivillkoret $x+y=8$. (4p)

3. Låt D vara den del av cirkelskivan $x^2+y^2 \leq 4$ som ligger i första kvadranten.

(a) Beräkna volymen av kroppen $K: 0 \leq z \leq 1+xy, (x,y) \in D$, dvs. den kropp som ligger rakt ovanför D mellan xy-planet och funktionsytan $z = 1+xy$. (3p)

(b) Beräkna arean av ytan $Y: z = 1+xy, (x,y) \in D$, dvs. del del av funktionsytan $z = 1+xy$ som ligger rakt ovanför D. (3p)

4. (a) Använd Greens formel för att beräkna kurvintegralen $\oint_{\partial D} xy\,dx - x^2 dy$ längs randen ∂D till området $D: x \leq y \leq 2-x^2$, med positiv orientering. (3p)

(b) Beräkna kurvintegralen $\int_C xy\,dx - x^2 dy$ längs den del C av randen ∂D där $y = 2-x^2$ (med samma orientering som i deluppgift a). (2p)

5. Låt $\mathbf{F}$ vara vektorfältet $\mathbf{F}(x,y,z) = -x\mathbf{i} - y\mathbf{j} - z\mathbf{k}$ och låt S vara den del av sfären $x^2+y^2+z^2 = 3$ där $y \geq 0$.

(a) Parametrisera ytan S. (2p)

(b) Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F}$ genom ytan S i riktning mot origo. (4p)

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

Uppgifterna på denna del motsvarar lärmålen för överbetyg, men eventuella poäng från denna del får räknas in i totalpoängen på tentan, oavsett resultat på godkäntdelen.

6. Låt $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{då } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{då } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(a) Visa att $f(x,y)$ är kontinuerlig i $(0,0)$ (2p)

(b) Visa att $f(x,y)$ är partiellt deriverbar i $(0,0)$ (2p)

(c) Visa att $f(x,y)$ inte är differentierbar i $(0,0)$ (2p)

7. (a) Formulera Stokes´s sats (redogör för hela satsen med alla förutsättningar och inte bara själva formeln) (2p)

(b) Beräkna det arbete som kraftfältet $\mathbf{F} = z\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} - x\mathbf{k}$ uträttar på en partikel som rör sig ett helt varv längs den slutna skärningskurvan mellan cylindrarna $y = z^2$ och $x^2 + z^2 = 1$, orienterad moturs sett från en punkt långt ut på positiva y-axeln. (4p)

8. Formulera och bevisa kedjeregeln för sammansättningar $f \circ \mathbf{g}$ då $\mathbf{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ och $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (6p)

Lycka till!
Thomas Wernstål

Anonym kod	MVE470, Flervariabelanalys, K/Kf/Bt	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan $z = \ln(x^2 + y^2)$ i den punkt där $x = -1$ och $y = 2$. (2p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Visa att $f(x, y) = x + 8y + \dfrac{1}{xy}$ har ett lokalt minimum i punkten $(2, \frac{1}{4})$. (3p)

Lösning:

(c) Bestäm en potential till det konservativa vektorfältet $\mathbf{F} = \dfrac{y}{(x+y)^2}\mathbf{i} - \dfrac{x}{(x+y)^2}\mathbf{j}$ (3p)

Lösning:

Svar: ....

(d) Definiera begreppet kurvintegral av en funktion dvs. vad som menas med $\displaystyle\int_C f(x, y, z)\, ds$ (2p)

Definition:

Formelblad för MVE470/MVE351, läsåret 17/18

Trigonometri.

$$\cos(x+y)=\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y)=\sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y)=\frac{1}{2}(\cos(x-y)+\cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y)=\frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y)=\frac{1}{2}(\sin(x-y)+\sin(x+y))$$

$$\tan(x+y)=\frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$$

Integralkatalog

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}+C \quad,\quad a\neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|+C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{cos^2 x}\,dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}+C \ ,\ 0<a\neq 1$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C \ ,\ a\neq 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)|+C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{\sqrt{a}}+C \ ,\ a>0$$

$$\int \sqrt{a-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2}+\frac{a}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{a}}+C \ ,\ a>0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln|x+\sqrt{x^2+a}|+C \ ,\ a\neq 0$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a}+a\ln|x+\sqrt{x^2+a}|)+C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix}\alpha\\ k\end{pmatrix}x^k = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\dots \quad,\quad |x|<1 \quad,\quad \begin{pmatrix}\alpha\\ k\end{pmatrix}=\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\dots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots \quad,\quad -1<x\leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\dots \quad,\quad |x|\leq 1$$

Övrigt

Masscentrum (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \dfrac{\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dxdydz}$, analogt för y_T, z_T.

$\rho(x,y,z)$ är densiteten.