Anonym kod	MVE470, Flervariabelanalys, K/Kf/Bt	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan $z = \ln(x^2 + y^2)$ i den punkt där $x = -1$ och $y = 2$. (2p)

Lösning: $f_1(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2}$, $f_1(-1,2) = \frac{-2}{5}$, $f(-1,2) = \ln 5$

$f_2(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2}$, $f_2(-1,2) = \frac{4}{5}$

Svar: $z = \ln 5 - \frac{2}{5}(x+1) + \frac{4}{5}(y-2)$ $\left(\Leftrightarrow z = \ln 5 - \frac{2}{5}x + \frac{4}{5}y - 2\right)$

(b) Visa att $f(x,y) = x + 8y + \frac{1}{xy}$ har ett lokalt minimum i punkten $(2, \frac{1}{4})$. (3p)

Lösning: $\nabla f = \left(1 - \frac{1}{x^2y}, 8 - \frac{1}{xy^2}\right)$, $\nabla f(2, \frac{1}{4}) = (0,0)$

så $(2, \frac{1}{4})$ är en kritisk punkt till f.

$H(x,y) = \begin{bmatrix} 2/x^3y & 1/x^2y^2 \\ 1/x^2y^2 & 2/xy^3 \end{bmatrix}$, $H(2, \frac{1}{4}) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 64 \end{bmatrix}$

Eftersom det $H(2, \frac{1}{4}) = 64 - 16 > 0$ och $f_{11}(2, \frac{1}{4}) = 1 > 0$ är $H(2, \frac{1}{4})$ positivt definit och det följer att f har ett lokalt minimum i $(2, 1/4)$

(c) Bestäm en potential till det konservativa vektorfältet $\mathbf{F} = \frac{y}{(x+y)^2}\mathbf{i} - \frac{x}{(x+y)^2}\mathbf{j}$ (3p)

Lösning: Vi söker funktion ϕ s.a. $\mathbf{F} = \nabla\phi$.

$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{y}{(x+y)^2} \Rightarrow \phi = \frac{-y}{x+y} + g(y)$, för ngn. funktion g

$\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{-1}{x+y} + \frac{y}{(x+y)^2} + g'(y) = \frac{-x}{(x+y)^2} + g'(y)$ så $g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = C$

Svar: Med $C = 0$ får vi potentialen $\phi = \frac{-y}{x+y}$

(d) Definiera begreppet kurvintegral av en funktion dvs. vad som menas med $\int_C f(x,y,z)\,ds$ (2p)

Definition: Givet en funktion $f(x,y,z)$ och en parametrisering $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $a \le t \le b$, av en kurva C så definierar vi kurvintegralen av f över kurvan C genom integralen

$$\int_C f(x,y,z)\,ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\,\|\mathbf{r}'(t)\|\,dt$$

Uppg 2 a) Eftersom f är kontinuerlig och
$f(x,8-x) = x^5(8-x)^3 \to -\infty$ då $x \to \pm\infty$
så måste f anta ett största värde
längs linjen $x+y=8$

b) Lagrange metod ger ekvationssystemet;

$$\begin{cases} 5x^4y^3 + \lambda = 0 \\ 3x^5y^2 + \lambda = 0 \\ x+y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x^4y^3 = 3x^5y^2 \\ x+y = 8 \end{cases}$$

Vi avläser direkt att $(0,8)$ och $(8,0)$ är lösn.
och för $x \neq 0$ och $y \neq 0$ får vi;

$$\begin{cases} 5y = 3x \\ x+y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = (5,3)$$

Vi har $f(0,8) = f(8,0) = 0$ och $f(5,3) = 5^5 \cdot 3^3$

Svar: Det största värdet är $5^5 \cdot 3^3$ $(= 84375)$

Uppg 3 a) Volymen $= \iint_D (1+xy)\,dx\,dy = \iint_D dx\,dy + \iint_D xy\,dx\,dy =$

$$= \pi + \int_0^2 \left(\int_0^{\pi/2} r\cos\theta \cdot r\sin\theta \cdot r \, d\theta \right) dr =$$

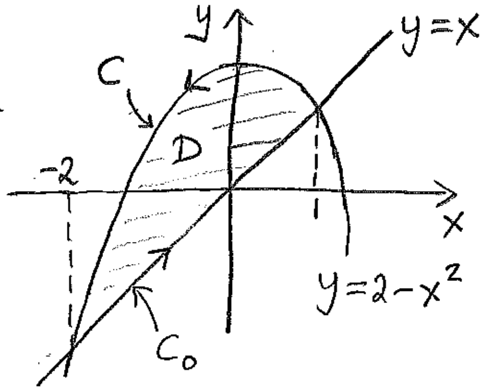
polär subst.

$$= \pi + \left[\frac{\sin^2\theta}{2} \right]_0^{\pi/2} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^2 = \underline{\underline{\pi + 2}}$$

b) $\text{Arean} = \iint_Y dS = \iint_D \sqrt{y^2+x^2+1}\, dx\,dy =$

$$= \int_0^2 \left(\int_0^{\pi/2} \sqrt{r^2+1} \cdot r \, d\theta \right) dr = \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{3} (r^2+1)^{3/2} \right]_0^2 = \underline{\underline{\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)}}$$

Uppg. 4



$2-x^2 = x \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow$

$x = \frac{-1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$

a) $$\oint_{\partial D} xy\,dx - x^2 dy \overset{\text{Greens formel}}{=} \iint_D (-2x-x)\,dx\,dy =$$

$$= -3 \int_{-2}^{1} \left(\int_x^{2-x^2} x \, dy \right) dx = -3 \int_{-2}^{1} x(2-x^2-x)\,dx =$$

$$= -3 \left[x^2 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-2}^{1} = -3\left(1-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}-\left(4-4+\frac{8}{3}\right)\right) = \underline{\underline{\frac{27}{4}}}$$

b) $$\int_C xy\,dx - x^2 dy = \underbrace{\oint_{C+C_0} xy\,dx - x^2 dy}_{= 27/4 \text{ enl. a)}} - \int_{C_0} \underbrace{xy\,dx - x^2 dy}_{=0 \text{ på } C_0} = \underline{\underline{\frac{27}{4}}}$$

alt. $$\int_C xy\,dx - x^2 dy \underset{y=2-x^2}{=} \int_1^{-2} (x(2-x^2) - x^2(-2x))\,dx =$$

$$= \int_1^{-2} (2x+x^3)\,dx = \left[x^2 + \frac{1}{4}x^4 \right]_1^{-2} = 4+4-\left(1+\frac{1}{4}\right) = \underline{\underline{\frac{27}{4}}}$$

<u>Uppg 5</u> a) Svar: S kan t.ex. parametriseras:

$$\mathbf{r} = \sqrt{3}\sin\phi\cos\theta\,\mathbf{i} + \sqrt{3}\sin\phi\sin\theta\,\mathbf{j} + \sqrt{3}\cos\phi\,\mathbf{k}$$

$$0 \le \phi \le \pi \quad , 0 \le \theta \le \pi$$

<u>alt.</u> $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + \sqrt{3-x^2-z^2}\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k} \;,\; x^2+z^2 \le 3$

b) $$\iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS = \iint_S \frac{x^2+y^2+z^2}{\sqrt{3}}\,dS = \iint_S \sqrt{3}\,dS = \underbrace{\sqrt{3}\cdot \overbrace{6\pi}^{\text{arean av halvsfär med radien } \sqrt{3}}}$$

$\hat{\mathbf{N}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})$ på S $\qquad x^2+y^2+z^2=3$ på S

<u>alt</u> $$\iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS \overset{\text{Gauss's formel}}{=} -\iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2\le 3\\ y\ge 0}} \overbrace{-3}^{\operatorname{div}\mathbf{F}}\,dV + \iint_{\substack{x^2+z^2\le 3\\ y=0}} \underbrace{\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}}_{\substack{=0\\ \text{på denna}\\ \text{bottenytan}}}\,dS = 3\cdot\overbrace{2\pi\sqrt{3}}^{\text{volymen av halvklot med radie } \sqrt{3}} = \underline{\underline{\sqrt{3}\cdot 6\pi}}$$

<u>Anm.</u> Om man inte minns formlerna för arean av en sfär eller volymen av ett klot så går det bra att beräkna integralerna ovan med sfärisk parametrisering resp. sfärisk substitution enl.

$$\iint_S dS = \int_0^{\pi}\left(\int_0^{\pi} 3\sin\phi\,d\phi\right)d\theta = 3\pi\Big[-\cos\phi\Big]_0^{\pi} = 6\pi$$

$$\iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2\le 3\\ y\ge 0}} dV = \int_0^{\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^{\sqrt{3}} \rho^2\sin\phi\,d\rho\right)d\phi\right)d\theta =$$

$$= \pi\Big[-\cos\phi\Big]_0^{\pi}\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{\sqrt{3}} = 2\pi\sqrt{3}$$

Uppg 6 a) $0 \leq \left| \frac{x^3 - y^3}{x^2+y^2} \right| \underset{\uparrow}{=} r|\cos^3\theta - \sin^3\theta| \leq 2r \to 0$

då $r \to 0$

polära koordinater

så $\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} \to 0 = f(0,0)$ då $(x,y) \to (0,0)$

vilket visar att f är kontinuerlig i $(0,0)$

b) $\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \frac{h}{h} = 1 \to 1$ då $h \to 0$, så $f_1(0,0) = 1$

$\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \frac{-k}{k} = -1 \to -1$ då $k \to 0$, så $f_2(0,0) = -1$

vilket visar att f är partiellt deriverbar i $(0,0)$

c) $\frac{f(h,k)-f(0,0)-hf_1(0,0)-kf_2(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} =$

$$= \frac{\frac{h^3-k^3}{h^2+k^2} - h + k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{h^2k - hk^2}{(h^2+k^2)^{3/2}} \xrightarrow{h=-k} \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0, \text{ då } k \to 0$$

vilket visar att f <u>inte</u> är differentierbar i $(0,0)$

Uppg 7 b) $\text{curl}\,\mathbb{F} = \begin{vmatrix} \mathbb{i} & \mathbb{j} & \mathbb{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & y^2 & -x \end{vmatrix} = 2\mathbb{j}$

C är kantkurva till ylan $S: y = z^2,\ x^2+z^2 \le 1$

$$\text{Arbetet} = \oint_C \mathbb{F} \bullet d\mathbb{r} \overset{\text{Stokes's sats}}{=} \iint_S \text{curl}\,\mathbb{F} \bullet \underbrace{\hat{\mathbb{N}}\,dS}_{(\mathbb{j}-2z\mathbb{k})dxdz \text{ på } S} =$$

$$= \iint_{x^2+z^2\le 1} 2\,dxdz = \underline{\underline{2\pi}}$$

alt. C kan parametriseras av;

$\mathbb{r} = \cos t\,\mathbb{i} + \sin^2 t\,\mathbb{j} + \sin t\,\mathbb{k}$

vilket ger;

$$\text{Arbetet} = \oint_C \mathbb{F} \bullet d\mathbb{r} =$$

$$= \int_{2\pi}^{0} (\sin t \cdot (-\sin t) + \sin^4 t \cdot 2\sin t \cos t - \cos t \cdot \cos t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (\underbrace{\sin^2 t + \cos^2 t}_{=1})\,dt - \underbrace{\int_0^{2\pi} 2\sin^5 t \cos t\,dt}_{=0} = \underline{\underline{2\pi}}$$