

Tentamen

MVE470 Flervariabelanalys, K/Kf/Bt/Ki

2021-03-19 14.00 - 18.00

Examinator: Maria Roginskaya, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Maria Roginskaya, telefon: 5341

Hjälpmedel: allt ickelevande

För godkänt på tentamen krävs minst 23 poäng på två delar sammanlagt. Bonuspoäng från duggor räknas med. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.

Del 1: Godkänddelen

1. Till nedanstående 4 uppgifter (a-d) skall korta lösningar redovisas, gärna på en sida.

(a) Hitta en ekvation av tangentplanen till yta given som $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 14$ i punkten $(1, 1, 1)$. (2p)

(b) Konrollera att punkten $(2, 1)$ är en stationär punkt för funktionen $f(x, y) = x^2y - xy^2 - 3x$ och undersök om den är lokal extrempunkt eller sadelpunkt. (3p)

(c) Parametrisera en kurva som är den del av grafen av funktionen $f(x) = 4 - x^2$ som ligger in första kvart av koordinatplanen. Ställ upp en integral som ger längd på kurvan (du behöver inte beräkna integralen). (2p)

(d) Beräkna divergensen och rotationen för vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = ye^{xy}\mathbf{i} + xe^{xy}\mathbf{j} + 3\cos(3z)\mathbf{k}$. Är vektorfältet konservativt? Är det källfritt? (3p)

2. Bestäm Taylorspolynom av andra grad till funktionen $f(x, y) = x \sin(y - 1) + y \cos(x - 1)$ i punkten $(1, 1)$ och använd den för att beräkna approximativt värdet $f(1.1, 0.9)$. (6p)

3. Bestäm maximum av funktionen $f(x, y) = xy^2$ över en kurva $x^2 + y^2 = 4$. (5p)

4. (a) Beräkna dubbelintegralen (3p)

$$\iint_D \cos(2x - y) \cos(x - y) dA$$

där D är begränsad av linjerna $y = 2x + 2$, $y = 2x + 3$, $y = x - 2$, $y = x - 3$.

(b) Beräkna dubbelintegralen (3p)

$$\iint_D y dA,$$

där $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4, x \leq y, y \geq -x\}$.

5. Betrakta vektorfältet $\mathbf{F}(x, y) = -x^2y\mathbf{i} + xy^2\mathbf{j}$. Beräkna arbetet som $\mathbf{F}$ uträttar längs randen C positivt orienterad till området D som ges av $x^2 + y^2 \leq 4$ (5p)

(a) Från definition

(b) med hjälp av Greens formeln

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

6. Avgör om följande gränsvärdena existerar eller ej och bestäm i förekommande fall deras värde (tydlig motivering krävs!) (6p)

$$(a) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) \quad (b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x,y),$$

där

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{x+y}, & x+y \neq 0 \\ 0, & x+y = 0. \end{cases}$$

och

$$g(x,y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin(\frac{1}{xy}), & xy \neq 0 \\ 0, & xy = 0. \end{cases}$$

7. Betrakta vektorfältet $\mathbf{F}(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Låt S vara ytan vilken utgör randen till kroppen i $\mathbb{R}^3$ som ges av olikheterna $z^2 \geq x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, $z \geq 0$. Ytan S är orienterad med utåt pekande normalen (6p)

- (a) Beräkna flödet av $\mathbf{F}$ ut genom S med hjälp av definition.
(b) Beräkna flödet av $\mathbf{F}$ ut genom S med hjälp av divergenssatsen.

8. Redogör samband mellan partiella derivator av $g(x,y)$ och partiella derivator av $f(x,y)$ där $g(x,y) = f(2x+y, x+2y)$ och alla partiella derivator av f är kontinuerliga. Visa sambandet utan att använda flerdimensionella kedjeregeln (du får anpassa bevis av kedjeregeln, eller göra bevis på ett annat sätt från definitionen). (6p)

Lycka till!
Maria Roginskaya