Tentamen
MVE470 Flervariabelanalys, K/Kf/Bt/Ki

2021-03-19 14.00 - 18.00

Examinator: Maria Roginskaya, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Maria Roginskaya, telefon: 5341

Hjälpmedel: allt ikkelevande

För godkänt på tentamen krävs minst 23 poäng på två delar sammanlagt. Bonuspoäng från duggor räknas med. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.

Del 1: Godkäntdelen

1. Till nedanstående 4 uppgifter (a-d) skall korta lösningar redovisas, gärna på en sida.

(a) Hitta en ekvation av tangentplanen till yta given som $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 14$ i punkten $(1, 1, 1)$. (2p)

Lösningsförslag: Denna är en nivå yta till $f(x, y, z) = x^2+4y^2+9z^2$, så tangentplanen ska vara vinkelrätt mot ∇f. $\nabla f(x, y, z) = (2x, 8y, 18z)$, så $\nabla f(1, 1, 1) = (2, 8, 18)$. En ekvation av planet $2(x - 1) + 8(y - 1) + 18(z - 1) = 0$, dvs. $2x + 8y + 18z = 28$.

(b) Konterollera att punkten $(2, 1)$ är en stationär punkt för funktionen $f(x, y) = x^2y - xy^2 - 3x$ och undersök om den är lokal extrempunkt eller sadelpunkt. (3p)

Lösningsförslag: $\nabla f(x, y) = (2xy-y^2-3, x^2-2xy)$, så $\nabla f(2, 1) = (0, 0)$, dvs. punkten är stationär. Hessian matrisen är $\begin{pmatrix} 2y & 2x-2y \\ 2x-2y & -2x \end{pmatrix}$, vilket i punkten $(2, 1)$ blir $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$. Determinant av Hessianen är $-8-4 = -12 < 0$, så egenvärden har olika tecken, och då punkten är en sadel-punkt.

(c) Parametrisera en kurva som är den del av grafen av funktionen $f(x) = 4 - x^2$ som ligger in första kvart av koordinatplanen. Ställ upp en integral som ger längd på kurvan (du behöver inte beräkna integrallen). (2p)

Lösningsförslag: Parametrisering: $r(x) = (x, 4-x^2)$, då $x \in [0, 2]$. Längden: $\int_0^2 \sqrt{1 + 4x^2}dx$.

(d) Beräkna divergensen och rotationen för vektorfältet $\boldsymbol{F}(x, y, z) = ye^{xy}\boldsymbol{i} + xe^{xy}\boldsymbol{j} + 3\cos(3z)\boldsymbol{k}$. Är vektorfältet konservativt? Är det källfritt? (3p)

Lösningsförslag: $curl(F) = 0\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} + ((xye^{xy} + e^{xy}) - (xye^{xy} + e^{xy}))\boldsymbol{k} = (0, 0, 0)$. $div(F) = y^2e^{xy}+x^2e^{xy}-9\sin(3z) \neq 0$. Då fältet definierat i hela planet och $curl(F) = 0$ är den konservativt. Då $div(F) \neq 0$ är det inte källfritt.

2. Bestäm Taylorspolynom av andra grad till funktionen $f(x, y) = x\sin(y - 1) + y\cos(x - 1)$ i punkten $(1, 1)$ och använd den för att beräkna approximativ värdet $f(1.1, 0.9)$. (6p)

Lösningsförslag: $f(1, 1) = 1$, $\nabla f(x, y) = (\sin(y-1)-y\sin(x-1), x\cos(y-1)+\cos(x-1))$, så $\nabla f(1, 1) = (0, 2)$. $Hf(x, y) = \begin{pmatrix} -y\cos(x-1) & \cos(y-1)-\sin(x-1) \\ \cos(y-1)-\sin(x-1) & -x\sin(y-1) \end{pmatrix}$, så $Hf(1, 1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Alltså Taylorpolynomet blir $p_2(x, y) = 1 + 2(y - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + (x-1)(y-1)$. Genom att använda polynomen ser vi att $f(1.1, 0.9) \sim 1+2(-0.1)-\frac{1}{2}0.1^2 + \cdot 0.1(-0.1) = 1 - 0.2 - 0.005 - 0.01 = 0.785$.

VÄND!

3. Bestäm maximum av funktionen $f(x,y) = xy^2$ över en kurva $x^2 + y^2 = 4$. (5p)

Lösningsförslag: Kurvan är en cirkel, dvs. begränsad och sluten, så maximum uppnås. Eftersom f och $g(x,y) = x^2 + y^2 - 4$ har kontinuerliga derivator, samt kurvan har inga ändpunkter och $\nabla g \neq 0$ på kurvan kan vi använda Lagrange-metoden. $L(x,y,\lambda) = xy^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 4)$. $\nabla L(x,y,\lambda) = (y^2 + 2\lambda x, 2xy + 2\lambda y, x^2 + y^2 - 4) = 0$, så $y^2 + 2\lambda x = 0$, $2xy + 2\lambda y = 0$, och $x^2 + y^2 - 4 = 0$. Ur den andra får vi att $y = 0$ eller $x = -\lambda$. I första fall $x = \pm 2$, $y = 0$, $\lambda = 0$ är två lösningar. I andra fall, $y^2 = 2x^2$, $x^2 = 4/3$, så $x = \pm 2\sqrt{3}/3, y = \pm 2\sqrt{6}/3, \lambda = -x$ är fyra lösningar. Vi beräknar värden för f i dem 6 punkterna. Dessa blir 0, och $\pm 16\sqrt{3}/9$. Av dem $16\sqrt{3}/9$ är den största, och är därmed maximum för funktionen.

4. (a) Beräkna dubbelintegralen (3p)

$$\iint_D \cos(2x - y)\cos(x - y)dA$$

där D är begränsad av linjerna $y = 2x + 2$, $y = 2x + 3$, $y = x - 2$, $y = x - 3$.

Lösningsförslag: Låt oss göra variabelsubstitution $u = 2x - y$, $v = x - y$. Då blir D' begränsad av linjerna $u = -2$, $u = -3$, $v = 2$ och $v = 3$. $dxdy = |det(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)})|dudv = |det(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)})|^{-1}dudv = |\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}|^{-1}dudv = dudv$. Så integralen blir $\iint_{D'} \cos(u)\cos(v)dudv = \int_{-3}^{-2} \cos(u)du \int_2^3 \cos(v)dv = (\sin(2) - \sin(3))^2$.

(b) Beräkna dubbelintegralen (3p)

$$\iint_D ydA,$$

där $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 4, x \leq y, y \geq -x\}$.

Lösningsförslag: Vi går över till polära koordinat D' får då begränsningar $0 \leq r \leq 2$ och $\pi/4 \leq \theta \leq 3/4\pi$. Så integrallen blir $\iint_{D'} r\sin(\theta)rdrd\theta = \int_{\pi/4}^{3/4\pi} \sin(\theta)d\theta \int_0^2 r^2 dr = \frac{8}{3}\sqrt{2}$.

5. Betrakta vektorfältet $\boldsymbol{F}(x,y) = -x^2y\boldsymbol{i} + xy^2\boldsymbol{j}$.Beräkna arbetet som $\boldsymbol{F}$ uträttar längs randen C positivt orienterad till området D som ges av $x^2 + y^2 \leq 4$ (5p)

(a) Från definition

Lösningsförslag: Vi parametriserar kurvan med $r(t) = (2\cos(t), 2\sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$. Arbetet då ges av $\int_0^{2\pi} -4\cos^2(t)2\sin(t)(-2\sin(t)) + 2\cos(t)4\sin^2(t)(2\cos(t))dt = \int_0^{2\pi} 32\sin^2(t)\cos^2(t)dt = \int_0^{4\pi} 4\sin^2(s)ds$, där $s = 2t$. Dett blir $\int_0^{4\pi} 2(1 - \cos(2s))ds = \int_0^{8\pi}(1 - \cos(u))du = 8\pi$.

(b) med hälp av Greens formeln

Lösningsförslag: $curl(F) = x^2 + y^2$, så Greens formel ger oss att arbetet är lika med $\iint_D x^2 + y^2 dxdy$ när vi går över till polära koordinater blir området $D' = \{r \leq 2, \theta \in [0, 2\pi]\}$, så integralen blir $\int_0^{2\pi}\int_0^2 r^3 drd\theta = 2\pi[r^4/4]_0^2 = 8\pi$.

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

6. Avgör om följande gränsvärdena existerar eller ej och bestäm i förekommande fall deras värde (tydlig motiveringen krävs!) (6p)

$$(a) \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \quad (b) \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y),$$

där

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{x+y}, & x+y \neq 0 \\ 0, & x+y = 0. \end{cases}$$

och

$$g(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin(\frac{1}{xy}), & xy \neq 0 \\ 0, & xy = 0. \end{cases}$$

Lösningsförslag:

a) Gränsvärdet saknas. Låt komma till $(0,0)$ längs linjen $x = y$. $\frac{x}{x+y} = \frac{1}{2}$, så om gränsvärdet har funnits skulle det vara $\frac{1}{2}$. Å andra hand, om vi kommer längs x-axis ($y = 0$) vi får $\frac{x}{x+y} = 1$, Så om gränsvärdet hade funnits skulle den vara 1. Eftersom gränsvärdet kan inte vara båda $\frac{1}{2}$ och 1, kan det inte finnas.

b) Eftersom $|\sin(\frac{1}{xy})| \leq 1$, har vi $-(x^2+y^2) \leq (x^2+y^2)\sin(\frac{1}{xy}) \leq (x^2+y^2)$. Båda $-(x^2+y^2)$ och (x^2+y^2) går till 0 när (x,y) går till $(0,0)$, så $(x^2+y^2)\sin(\frac{1}{xy})$ går till 0 när den är definierat. För resterande punkter, $f(x,y) = 0$. Så gränsvärdet finns och är 0.

7. Betrakta vektorfälet $\boldsymbol{F}(x,y,z) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$. Låt S vara ytan vilken utgör randen till kroppen i $\mathbb{R}^3$ som ges av olikheterna $z^2 \geq x^2+y^2$, $x^2+y^2+z^2 \leq 4$, $z \geq 0$. Ytan S är orienterad med utåt pekande normalen (6p)

(a) Beräkna flödet av $\boldsymbol{F}$ ut genom S med hjälp av definition.

Lösningsförslag: ytan består av en del som ligger på konen $z^2 = x^2+y^2$, och en del av sfären $x^2+y^2+z^2 = 4$. Fältet pekar längs linjer som går genom origo, så den är parallell med konen, dvs. flödet genom den del är 0. Flödet är normalt till sfären, så flödet genom den del av yta är 2 gånger area av ytan. Arean blir $8\pi(1-\sqrt{2}/2)$ Så svaret är $16\pi(1-\sqrt{2}/2)$.

(b) Beräkna flödet av $\boldsymbol{F}$ ut genom S med hjälp av divergenssatsen.

Lösningsförslag: $div(F) = 1+1+1 = 3$, så enligt till divergenssats blir flödet likt med $\iiint_D 3dV$, där D är kroppen given av $z^2 \geq x^2+y^2$, $x^2+y^2+z^2 \leq 4$, $z \geq 0$. Vi går över till sfäriska koordinat $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^2 3r^2\sin(\phi)drd\phi d\theta = 2\pi[r^3]_0^2[-\cos(\phi)]_0^{\pi/4} = 16\pi(1-\sqrt{2}/2)$.

VÄND!

8. Redogör samband mellan partiella derivator av $g(x,y)$ och partiella derivator av $f(x,y)$ där $g(x,y) = f(2x+y, x+2y)$. Visa sambandet utan att använda flerdimensionella kedjeregeln (du får anpassa bevis av kedjregeln, eller göra bevis på ett annat sätt från definitionen). (6p)

Lösningsförslag:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2(x+\Delta x)+y, (x+\Delta x)+2y) - f(2x+y, x+2y)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2(x+\Delta x)+y, (x+\Delta x)+2y)+2y) - f(2x+y, (x+\Delta x)+2y)}{\Delta x} +$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2x+y, (x+\Delta x)+2y)+2y) - f(2x+y, x+2y)}{\Delta x} =$$

medelvärdesats ger oss (med en $\theta_1, \theta_2 \in (0,1)$)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(2x+2\theta_1 \Delta x + y, (x+\Delta x)+2y) 2\Delta x}{\Delta x} +$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(2x+y, x+\theta_2 \Delta x + 2y)\Delta x}{\Delta x} =$$

$$2\frac{\partial f}{\partial x}(2x+y, x+2y) + \frac{\partial f}{\partial y}(2x+y, x+2y).$$

Likadant kan vi visa att $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(2x+y, x+2y) + 2\frac{\partial f}{\partial y}(2x+y, x+2y)$.

Lycka till!
Maria Roginskaya