

# Tentamen

## MVE470 Flervariabelanalys, K/Kf/Bt/Ki

2021-03-19 14.00 - 18.00

**Examinator:** Maria Roginskaya, Matematiska vetenskaper, Chalmers

**Telefonvakt:** Maria Roginskaya, telefon: 5341

**Hjälpmedel:** allt ickelevande

För godkänt på tentamen krävs minst 23 poäng på två delar sammanlagt. Bonuspoäng från duggor räknas med. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.

---

### Del 1: Godkänddelen

1. Till nedanstående 4 uppgifter (a-d) skall korta lösningar redovisas, gärna på en sida.

- (a) Hitta en riktningsderivatan av funktionen  $f(x, y) = 2x^2 - y^2$  i punkten  $(1, 1)$  och i riktningen  $u = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$ . (2p)

Lösningsförslag:  $\nabla f(x, y) = (4x, -2y)$ , så  $\nabla f(1, 1) = (4, -2)$ .  $\|(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})\| = 1$ .  $f_u = (4, -2) \cdot (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2}$ .

- (b) Låt  $f(x, y) = y \sin(x - 2)$ . Bestäm linjärisering av  $f$  i  $(2, 1)$  och beräkna ett approximativt värde för  $f(1.99, 1.01)$ . (3p)

Lösningsförslag:  $\ell(x, y) = f(2, 1) + \frac{\partial f(2, 1)}{\partial x}(x - 2) + \frac{\partial f(2, 1)}{\partial y}(y - 1) = x - 2$ , så  $f(1.99, 1.01) \approx -0.01$

- (c) Parametrisera en kurva som är den del av grafen av funktionen  $f(x) = 3/x$  som motsvarar  $x \in [2, 4]$ . Ställ upp en integral som ger längd på kurvan (du behöver inte beräkna integralen). (2p)

Lösningsförslag:  $(x, 3/x)$ ,  $x \in [2, 4]$  är en parametrisering.  $\int_2^4 \sqrt{1 + \frac{9}{x^4}} dx$  ger längden.

- (d) Beräkna divergensen och rotationen för vektorfältet  $\mathbf{F}(x, y, z) = yze^{xyz}\mathbf{i} + xze^{xyz}\mathbf{j} + xye^{xyz}\mathbf{k}$ . Är vektorfältet konservativt? Är det källfritt? (3p)

Lösningsförslag:  $\operatorname{div}(\mathbf{F}) = (y^2z^2 + x^2z^2 + x^2y^2)e^{xyz}$ ,  $\operatorname{curl}(\mathbf{F}) = (x(1 + xyz)e^{xyz} - x(1 + xyz)e^{xyz})\mathbf{i} + (y(1 + xyz)e^{xyz} - y(1 + xyz)e^{xyz})\mathbf{j} + (z(1 + xyz)e^{xyz} - z(1 + xyz)e^{xyz})\mathbf{k} = \mathbf{0}$ . Fältet är alltså virvelfritt, och då den är kontinuerlig och glatt på hela  $\mathbb{R}^3$  är fältet konservativt. Fältet är inte källfritt.

2. Bestäm normalerna och tangentplanen till ytorna  $x^2 - y^3 + xz = 5$  och  $xy - z^3 = 1$  i punkten  $(2, 1, 1)$ . Vad är vinkel mellan dem två ytorna? (5p)

Lösningsförslag: Båda ytorna anges som nivåytor, så normalerna till dem är gradienter av motsvarande funktionerna.  $\nabla(x^2 - y^3 + xz) = (2x + z, -3y^2, x)$  i punkten  $(2, 1, 1)$  blir det  $(5, -3, 2)$ .  $\nabla(xy - z^3) = (y, x, -3z^2)$  i punkten  $(2, 1, 1)$  blir det  $(1, 2, -3)$ . Tangentplanen blir då  $5(x - 2) - 3(y - 1) + 2(z - 1) = 0$  och  $(x - 2) + 2(y - 1) - 3(z - 1) = 0$ . Cosinus av vinkel bestäms av skalär produkten av normala vektorer  $(5, -3, 2)(1, 2, -3)/(\sqrt{38}\sqrt{14}) = (5 - 6 - 6)/(2\sqrt{19}\sqrt{7}) = -7/(2\sqrt{19}\sqrt{7})$ . Vinkeln blir då  $\arccos(7/(2\sqrt{19}\sqrt{7}))$ .

3. Bestäm maximum av funktionen  $f(x, y) = x^2y^2 + 2xy^2 + y^2$  över ett område  $-2 \leq x \leq 2$ ,  $-2 \leq y \leq 2$ . (6p)

Lösningsförslag:  $\nabla f = (2xy^2 + 2y^2, 2yx^2 + 4xy + 2y) = (0, 0)$  har lösningar  $y = 0$ , eller  $x = -1$  (dvs. två linjer består av extrempunkter). På dem extrempunkterna  $f = 0$ . För randen har vi fyra sträckor  $\{x = -2, -2 \leq y \leq 2\}$ ,  $\{x = 2, -2 \leq y \leq 2\}$ ,  $\{y = -2, -2 \leq x \leq 2\}$ ,  $\{y = 2, -2 \leq x \leq 2\}$ . På dessa sträckor är  $f$  en funktion av en variabel. På  $x = -2$  och  $x = 2$  är  $f = 4y^2$  och på  $y = -2$  och  $y = 2$  är  $f = x^2 + 4$ . Dessa funktioner har maximum vid  $y = 2$  respektive  $x = 2$ . Därmed är maximumet  $f(2, 2) = 20$ .

$-2 \leq x \leq 2$ }, och  $\{y = 2, -2 \leq x \leq 2\}$ . För  $x = -2$  har vi  $f(-2, y) = y^2$ , som har minimum vid  $y = 0$  och maximum vid  $y = \pm 2$ . På samma sätt analyserar vi andra sidor och hittar att minimum är 0 och maximum uppnås i ändpunkterna. Vi beräknar värdet av funktionen  $f$  i alla kvadratets hörn:  $f(-2, 2) = f(-2, -2) = 4$ ,  $f(2, 2) = f(2, -2) = 36$ . Alltså maximum är 36.

4. (a) Beräkna area av området som i polära koordinater begränsas av den raka linje  $r \cos(\phi) = 1$  och cirkeln  $r = 2$  och inte innehåller origo. (3p)

Lösningförslag: I Kartesiska koordinater begränsas området av linje  $x = 1$  och cirkel  $x^2 + y^2 = 4$ . De två kurvor skär varandra i punkterna  $(1, \sqrt{3})$  och  $(1, -\sqrt{3})$ . Om vi lägger till området triangel med hörn,  $(0, 0)$ ,  $(1, \sqrt{3})$  och  $(1, -\sqrt{3})$ , får vi en sektor av cirkeln med öppning  $120^\circ$ . Den sektor har area  $\pi 4/3$ . Triangeln som vi har adderat har arean  $\sqrt{3}$ , så area av området är  $\pi 4/3 - \sqrt{3}$ .

- (b) Beräkna dubbelintegralen (3p)

$$\iint_D xy^2 dA,$$

där  $D$  är området begränsad av parabeln  $y^2 = 2x$  och linjen  $x = 1$ .

Lösningförslag: Området kan beskrivas som  $0 < x < 1$  och  $-\sqrt{2x} < y < \sqrt{2x}$ , så vi skriver om integralen som dubbelintegral  $\int_0^1 \int_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} xy^2 dy dx = \int_0^1 x [\frac{1}{3}y^3]_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} dx = \frac{4}{3}\sqrt{2} \int_0^1 x^{\frac{5}{2}} dx = \frac{8\sqrt{2}}{21} [x^{\frac{7}{2}}]_0^1 = \frac{8\sqrt{2}}{21}$ .

5. Betrakta vektorfältet  $\mathbf{F}(x, y) = 2(x^2 + y^2)\mathbf{i} + (x + y)^2\mathbf{j}$ . Beräkna arbetet som  $\mathbf{F}$  uträttar längs positivt orienterad randen  $C$  till triangeln med hörn i  $(1, 1)$ ,  $(2, 2)$ , och  $(1, 2)$  (5p)

- (a) Från definition

Randen består av tre raka sträckor. Vi räknar arbetet längs varje. Från  $(2, 2)$  till  $(1, 2)$  blir det  $\int_2^1 2(x^2 + 4)dx = \frac{2}{3}[x^3]_2^1 - 8 = -\frac{14}{3} - 8$ . Från  $(1, 2)$  till  $(1, 1)$  blir det  $\int_2^1 1 + y dy = -1 + [\frac{1}{2}y^2]_2^1 = -1 - 3/2$ , och sträkan från  $(1, 1)$  till  $(2, 2)$  kan vi parametrisera med  $(t, t)$  där  $t \in [1, 2]$ , så längs den är arbetet  $\int_1^2 (2(t^2 + t^2) + (t + t))dt = \int_1^2 (4t^2 + 2t)dt = 28/3 + 6/2$ , vilket sammanlagd ger  $14/2 + 3/2 - 9$ .

- (b) Med hjälp av Greens formeln

Lösningförslag: Det blir dubbelintegral  $\oint_D (1 - 4y) dx dy$ , där området är triangeln, så den kan skrivas om som upprepande integral  $\int_1^2 \int_x^2 (1 - 4y) dy dx = \int_1^2 [y - 2y^2]_x^2 dx = \int_1^2 (-6 - x + 2x^2) dx = -6 - [\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3]_1^2 = -6 - 3/2 + 14/3$ . (Observera båda svar ger samma tal.)

VÄND!

## Del 2: Överbetygsdelen

Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

6. Avgör om följande gränsvärdena existerar eller ej och bestäm i förekommande fall deras värde (tydlig motiveringen krävs!) (6p)

$$(a) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \quad (b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

Lösningförslag:

a) Om  $x^2 + y^2 \leq \epsilon$ , så  $0 \leq \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \leq y^2 \leq \epsilon$ . Alltså när  $(x, y)$  är nära origo, blir  $\frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$  närmare och närmare 0, så gränsvärdet finns och är 0.

b) Om  $x = y$  är  $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = 0$ , om  $y = 0$  är  $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = 1$ . eftersom gränsvärdet kan inte bero på vilken riktning vi tar för att närma oss origo, finns den inte.

7. Betrakta vektorfältet  $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ . Låt  $S$  vara ytan vilken utgör randen till kroppen i  $\mathbb{R}^3$  som ges av olikheterna  $x^2 + y^2 \leq 4$ ,  $0 \leq z \leq 1$ . Ytan  $S$  är orienterad med utåt pekande normalen (6p)

- (a) Beräkna flödet av  $\mathbf{F}$  ut genom  $S$  med hjälp av definition.

Lösningförslaget: Kroppen är en cylinder (av radius 2 och höjd 1). Fältet är parallell med top och botten av cylindret, så ingen flöde förekommer genom dem. Fältet pekar rakt ut från cylinder i normalriktning, så strömen blir  $\|\mathbf{F}\| \cdot A$ , där  $\|\mathbf{F}\| = 2$  och  $A$  är area av bjöda del av cylinder, som blir  $4\pi$ . Flödet blir alltså  $8\pi$

- (b) Beräkna flödet av  $\mathbf{F}$  ut genom  $S$  med hjälp av divergenssatsen.

Lösningförslag: Med divergenssats, ser vi att flödet är lik med dubbelintegral av divergens.  $\text{div}(\mathbf{F}) = 1 + 1 = 2$ , dvs. en konstant funktion. Så dubbelintegralen blir  $2 \cdot V$ , där  $V$  är volumen på cylindret  $1 \cdot \pi 2^2 = 4\pi$ . Flödet är, alltså,  $8\pi$ .

8. Kontrollera att medelvärdersatsen för dubbelintegraler stämmer för  $f(x, y) = x^2 + y^2$ , på området  $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$  (du behöver inte göra uträkningar - man kan följa resonemangen i beviset av satsen). (6p)

Lösningförslag:  $f(x, y)$  är kontinuerlig i området och tar värden mellan 1 och 2. Arean av området  $D$  är  $4\pi - \pi = 3\pi$ . Så  $\int_D 1 dA = 3\pi \leq \int_D f(x, y) dA \leq \int_D 2 dA = 6\pi$ . Alltså,  $\frac{1}{A(D)} \int_D f(x, y) dA = \frac{1}{3\pi} \int_D f(x, y) dA \in [1, 2]$ . Av kontinuitet ser vi att alla värden mellan 1 och 2 antas i området, så det finns  $c \in D$  sådant att  $\frac{1}{A(D)} \int_D f(x, y) dA = f(c)$ .

Lycka till!  
Maria Roginskaya