

Tentamen

MVE470 Flervariabelanalys, K/Kf/Bt/Ki

2021-08-27 08.30–12.30

Examinator: Maria Roginskaya, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Maria Roginskaya, telefon: 5341

Hjälpmedel: allt ickelevande

För godkänt på tentamen krävs minst 23 poäng på två delar sammanlagt. Bonuspoäng från duggor räknas med. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.

Del 1: Godkänddelen

1. Till nedanstående 4 uppgifter (a-d) skall korta lösningar redovisas, gärna på en sida.

- (a) Hitta en riktningsderivatan av funktionen $f(x, y) = x^3y^4$ i punkten $(2, 1)$ och i riktningen $u = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$. (2p)

Lösningsförslag: $\nabla f = (3x^2y^4, 4x^3y^3)$, så $\nabla f(2, 1) = (12, 32)$. Riktningsderivatan blir $f'_u = (12, 32) \cdot (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}) = 56/\sqrt{5}$.

- (b) Låt $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + 3$. Hitta extrempunkterna och bestäm deras typ (lokal maximum/lokal minimum/saddel). (3p)

Lösningsförslag: $\nabla f = (2x - y + 1, 2y - x)$. Om $\nabla f = \mathbf{0}$, har vi $x = 2y$ och $2x - y + 1 = 0$, i.e. $3y + 1 = 0$, $y = -1/3$, och $x = -2/3$. För att se vilken typ är stationär punkten beräknar vi Hessian $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ som är konstant i alla punkter. Dess determinat är $4 - 1 = 3 > 0$, så detta är en extrempunkt. Också $2 > 0$ så matrisen är positivt definit, så vi har en lokal minimum. (Obs! Sadelpunkten är inte en extrempunkt, men man skulle kunna råka för den när man genomförde analysen.)

- (c) Parametrisera en kurva som är den kvart av elipsen $4x^2 + 9y^2 = 25$ som ligger i andra kvadranten. Ställ upp en integral som ger längd på kurvan (du behöver inte beräkna integralen). (2p)

Lösningsförslag: $(x, y) = (5/2 \cos(t), 5/3 \sin(t))$, $t \in [\pi/2, \pi]$.

Längden blir $\int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{(5/2)^2 \sin^2(t) + (5/3)^2 \cos^2(t)} dt$.

- (d) Beräkna divergensen och rotationen för vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = (y + z)\mathbf{i} - (x + z)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$. Är vektorfältet konservativt? Är det källfritt? (3p)

Lösningsförslag: $\operatorname{div}(\mathbf{F}) = 0 + 0 + 0 = 0$. Fältet är källfritt. $\operatorname{rot}(\mathbf{F}) = (1 - (-1))\mathbf{i} + (1 - 1)\mathbf{j} + ((-1) - 1)\mathbf{k} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{k}$. Så fältet är inte virvelfritt och då inte konservativt.

2. Bestäm normalen och tangentplanet till grafen av funktionen $f(x, y) = x^2y^3$ i punkten $(1, 2)$ (5p)

Lösningsförslag: $\nabla f = (2xy^3, 3x^2y^2)$. I punkten $(1, 2)$ har vi $\nabla f = (16, 12)$, så tangentplanet blir linjär approximationen av funktionen $z = 8 + 16(x - 1) + 12(y - 2)$, normalen till båda grafen och tangentplanet blir $(16, 12, -1)$.

3. Bestäm minimum av funktionen $f(x, y) = x^2 + 3xy + 6y^2 + 2x$ över ett triangulärt område med hörnen i $(0, 0)$, $(-2, 0)$, och $(0, -2)$. (6p)

Lösningsförslag: Hitta först extrempunkterna - $\nabla f = (2x + 3y + 2, 3x + 12y) = \mathbf{0}$, så $x = -4y$, $-8y + 3y + 2 = 0$, $5y = 2$, $y = 0,4$, $x = -1,6$. Punkten $(-1,6; 0,4)$ ligger

dock utanför triangel, så vi behöver inte undersöka den. Det vinnas inga andra stationära punkter, så extrema värden uppnås på randen.

Randen består av tre sträckor. Den första kan parametreras som $(t, 0)$, $t \in [-2, 0]$. Då $f(x(t), y(t)) = x^2 + 2x$, som har minimum vid $t = -1$ (dvs, för $(x, y) = (-1, 0)$, och maximum i ändpunkterna.

Den andra kan parametreras som $(0, t)$, $t \in [-2, 0]$. Då $f(x(t), y(t)) = 6t^2$, som har minimum i ena ändpunkten och maximum i den andra.

Den tredje kan parametreras som $(t, -2-t)$, där $t \in [-2, 0]$. Då $f(x(t), y(t)) = t^2 + 3t(-2-t) + 6(-2-t)^2 + 2t = (1-3+6)t^2 + (-6+24+2)t + 24 = 4t^2 + 20t + 24 = 4(t^2 + 5t + 6)$ som har minimum vid $t = -5/2$, som ligger utanför intervallen $[-2, 0]$. Alltså där når funktionen sin minimum och maximum i ändpunkterna.

Vi ska nu kontrollera hörn till triangel (som är ändpunkterna för sträckorna, samt punkten $(-1, 0)$.

$$f(0, 0) = 0, f(-2, 0) = 4 - 4 = 0, f(0, -2) = 6 \cdot 4 = 24, f(-1, 0) = 1 - 2 = -1.$$

Svar: Minimum blir -1 , som uppnås i punkten $(-1, 0)$. *****

4. (a) Beräkna dubbelintegral $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, där $D = \{x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$. (3p)

Lösningförslag: Vi går över till polära koordinater, där $D = \{r \leq 2, \theta \in [-\pi/2, \pi/2]\}$.

$$\iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^2 r^2 r dr d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [r^4/4]_0^2 d\theta = 4\pi$$

- (b) Beräkna dubbelintegralen (3p)

$$\iint_D xy^2 dA,$$

där $D = \{|x| + |y| \leq 4\}$.

Lösningförslag:

$$\iint_D xy^2 dA = \int_{-4}^4 \int_{|y|-4}^{4-|y|} xy^2 dx dy = \int_{-4}^4 y^2 [x^2]_{|y|-4}^{4-|y|} dy = \int_{-4}^4 0 dy = 0.$$

(Man kunde också se från början att i x riktning vi integrerar en odda funktion över en symmetrisk kring 0 interval.)

5. Betrakta vektorfältet $\mathbf{F}(x, y) = xy\mathbf{i} - (x + y)\mathbf{j}$. Beräkna arbetet som $\mathbf{F}$ uträttar längs positivt orienterad randen C till kvadraten med hörn i $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$ och $(1, -1)$ (5p)

- (a) Från definition

Vi kan dela kontorn i fyra sträckor, med positiv (moturs) orientering blir dem: från $(1, -1)$ till $(1, 1)$, från $(1, 1)$ till $(-1, 1)$, från $(-1, 1)$ till $(-1, -1)$, och från $(-1, -1)$ till $(1, -1)$. På varje sträcka blir arbete integral av skalärprodukten av fältet med tangentriktning (som är konstant på varje sträcka, i vårt fall).

Vi gör på motsvarande sträckor (Obs! riktning på integrering motsvarar orienteringen):

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 -(1+y) dy &= -2 \\ \int_1^{-1} x dx &= 0 \\ \int_1^{-1} -(-1+y) dy &= -2 \\ \int_{-1}^1 -x dx &= 0 \end{aligned}$$

Tillsammans blir det -4 .

(b) Med hjälp av Greens formeln

Greens formel säger att arbetet blir $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (-1 - x) dx dy = -4$. (Obs! båda sätt ger samma svar.)

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

6. Avgör om följande gränsvärdena existerar eller ej och bestäm i förekommande fall deras värde (tydlig motivering krävs!) (6p)

$$(a) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} \quad (b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x-y}{x^2+y^2}$$

Lösningförslag:

- (a) Gå över till polära koordinater, så får vi $\lim e^{-1/r^2}/r^2 = 0$, dvs. gränsvärdet finns.
(b) Betrakta $y = 0$, då x/x^2 är divergent, så gränsvärdet finns inte.

7. Betrakta vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Låt S vara ytan av kubens medelpunkten i origo och sidolängd 2. Ytan S är orienterad med utåt pekande normalen (6p)

- (a) Beräkna flödet av $\mathbf{F}$ ut genom S med hjälp av definition.

Lösningförslag: Vi har 6 sidor av kubens yta och flödet genom dem går i vinkelrätt riktning. Alltså flödet genom sidor parallella med xy-planet motsvarar $\mathbf{k}$ komponenten och $z = \pm 1$ (och likadant för andra sidor) när vi räknar till orientering får vi att vi ska integrera 1 över varje sida av kub, som har area 4. Hela flödet blir då $6 \cdot 4 = 24$

- (b) Beräkna flödet av $\mathbf{F}$ ut genom S med hjälp av divergenssatsen. Lösningförslag: $\text{div}(\mathbf{F}) = 3$. Divergenssatsen säger att flödet blir integral av divergens över kubens volym. Så den blir $3 \cdot 8$ (kubens volym är $2^3 = 8$).

8. Redogör för relationerna mellan egenskaperna för en funktion: kontinuerlig, kontinuerliga partiella derivator samt differentierbar. När någon av egenskaperna medför inte annan visa en (mot)exempel. (6p)

Lösningförslag: Kontinuerliga partiella derivator medför differentierbar, och differentierbar medför kontinuerlig.

Funktionen $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ är kontinuerlig, men är varken differentierbar eller har kontinuerliga partiella derivator i origo (se restriktionen till $y = 0$).

Funktionen $f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin(1/(x^2 + y^2))$ är differentierbar (den har uttryck som är differentierbar utanför origo, och approximeras till andra ordning av $l(x, y) = 0$ i origo). Men den har inte kontinuerliga partiella derivator i origo: När $y = 0$

$$\partial f / \partial x = 2x \sin(1/x^2) - 2/x \cos(1/x^2),$$

som är ej kontinuerlig i origo.

Lycka till!
Maria Roginskaya