

Matematisk analys

RÖ W1

Temat: Att fräscha upp gymnasimatematik

- Från upprepande decimaler till bråk
- Absolut belopp
- Komplexa tal
- Enkla derivator ($\exp(x)$, $\sin(x)$, $\cos(x)$, x^{heltal})
- Den enklaste kedjeregeln $(f(ax))' = af'(ax)$
- Den primitiva funktionen (obestämd integral)

EXERCISES P.1

In Exercises 3–4, express the given repeating decimal as a quotient of integers in lowest terms.

3. $0.\overline{12}$

4. $3.2\overline{7}$

EXERCISES P.1

Solve the equations in Exercises 27–32.

27. $|x| = 3$

$$|x - 0| = 3$$

28. $|x - 3| = 7$

EXERCISES P.1

In Exercises 33–40, write the interval defined by the given inequality.

33. $|x| < 2$

35. $|s - 1| \leq 2$

EXERCISES: APPENDIX I

43. $\frac{(1 + 2i)(2 - 3i)}{(2 - i)(3 + 2i)}$
46. Express each of the complex numbers $z = 3 + i\sqrt{3}$ and $w = -1 + i\sqrt{3}$ in polar form (i.e., in terms of its modulus and argument). Use these expressions to calculate zw and z/w .

EXERCISES: APPENDIX II

20. Verify the identities $\cos z = \cosh(iz)$ and $\sin z = -i \sinh(iz)$. What are the corresponding identities for $\cosh z$ and $\sinh(z)$ in terms of $\cos$ and $\sin$?

Kommentar: Enklare om man antar att $z = x + i \cdot 0$ alltså $z \in \mathbb{R}$. Klarar ni det då kan ni försöka med $z = x + iy$ so leder till lite längre uträkning.

Påminnelsen från kompendiet:

En bra övning: Försök relatera formler för trigonometriska och hyperboliska funktioner. Tex, börja från trigonometriska identiteter i Tabell "matchande identiteter för trig och hyp funktioner" och visa att motsvarande hyperboliska identiteter gäller. Sedan, byt sidan och visa den motsatta riktningen. Sist men inte minst, gör samma för additions formler.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\begin{aligned}\sin ix &= i \sinh x \\ \cos ix &= \cosh x\end{aligned}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\begin{aligned}\sinh ix &= i \sin x \\ \cosh ix &= \cos x\end{aligned}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

EXERCISES 3.6

För senare, när vi kommer att prata om differentiella ekvationer, inte nu. Men det är bra att ni ser vad är det ultimate målet vi siktar på! Hyperboliska funktioner är intressant för de är lösningar till en typ av differential ekvation: $y'' - ky = 0$.

- * 11. Show that the functions $f_{A,B}(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx}$ and $g_{C,D}(x) = C \cosh kx + D \sinh kx$ are both solutions of the differential equation $y'' - k^2y = 0$. (They are both general solutions.) Express $f_{A,B}$ in terms of $g_{C,D}$, and express $g_{C,D}$ in terms of $f_{A,B}$.
- * 12. Show that $h_{L,M}(x) = L \cosh k(x - a) + M \sinh k(x - a)$ is also a solution of the differential equation in the previous exercise. Express $h_{L,M}$ in terms of the function $f_{A,B}$ above.
- * 13. Solve the initial-value problem $y'' - k^2y = 0$, $y(a) = y_0$, $y'(a) = v_0$. Express the solution in terms of the function $h_{L,M}$ of Exercise 12.

EXERCISES 3.6

2. Verify the addition formulas

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y,$$

$$\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y.$$

$$\begin{aligned}\sinh ix &= i \sin x \\ \cosh ix &= \cos x\end{aligned}$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

EXAMPLE 1

Show that

3.6

Hyperbolic Functions

$$\frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x \quad \text{and} \quad \frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x.$$

$$\begin{aligned}\sinh ix &= i \sin x \\ \cosh ix &= \cos x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\sin x)' &= \cos x \\ (\cos x)' &= -\sin x\end{aligned}$$

$g(u)$	$g'(u)$	$(g(ax))' = a g'(ax)$
u^2	$2u$	$((ax)^2)' = a \cdot 2ax$
u^7	$7u^6$	$((ax)^7)' = a \cdot 7(ax)^6$
e^u	e^u	$(e^{ax})' = a \cdot e^{ax}$
$\ln u$	$\frac{1}{u}$	$(\ln ax)' = a \cdot \frac{1}{ax} = \frac{1}{x}$
$\sin u$	$\cos u$	$(\sin ax)' = a \cdot \cos ax$
$\cos u$	$-\sin u$	$(\cos ax)' = a \cdot (-\sin ax)$
$\sinh u$	$\cosh u$	$(\sinh ax)' = a \cdot \cosh ax$
$\cosh u$	$\sinh u$	$(\cosh ax)' = a \cdot \sinh ax$

EXERCISES 2.10

In Exercises 1–14, find the given indefinite integrals.

$$1. \int 5 \, dx \qquad (5x)' = 5(x)' = 5 \cdot 1 = 5$$

$$2. \int x^2 \, dx \qquad (x^3)' = 3x^2 \rightarrow \frac{1}{3}(x^3)' = x^2 \rightarrow \left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2$$

$$13. \int \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - 1 \right) \, dx$$