

W4 – integrations tekniker

den grundläggande teknik är att man gissar, och sen:

- partiellintegration (när man kan gissa en del av integralen, men kanske inte det hela)
- integraler av rationella funktioner kan förenklas till bara två typer
- variabel substitution (visa integral typer kan lösas med en vis typ av substitution)
- kommentarer i grått eller grafer, skall inte finnas tillgängliga på tentan. de finns nu för att underlätta övningen.

värmer upp med några enkla integraler:
primitiv funktion går att gissa

- $\int_0^1 dx = ?$ (1)
- $\int_0^1 x dx = ?$ (2)
- $\int_0^1 (1 - x) dx = ?$ (3)
- $\int_0^1 x(1 - x) dx = ?$ (4)
- $\int_0^1 x \sqrt{1 - x^2} dx = ?$ (5)
- visa att $\int \frac{dx}{x} = \ln |x|$ (6)
- $\int \frac{x dx}{1 + x^2} = ?$ (10)
- $\int \frac{x^2 dx}{1 + x^3} = ?$ (11)
- $\int x \cos x^2 dx = ?$ (12)

- Vilka av de är bestämda och vilka av de är obestämda integraler?
- Varför är (2)=(3)?

ADAMS/6.1 partiell integration: $\int u dv = u v - \int du v$

Integralen att räkna	tips
$\int x \sin x dx$	Ta $u = x$ och $dv = \sin x dx$. Räkna du , och hitta v .
(G) AD/6.1-Prob 1: $\int x \cos x dx$	Ta $u = x$ och $dv = \cos x dx$. Vad blir du ? Vad blir v då?
$\int x^2 \sin x dx$	$u = x^2$ och $dv = \sin x dx$
$\int \ln x dx$	Ta $u = \ln x$ och $dv = dx$. Vad blir du ? Vad blir v ?
(G) AD/6.1-Prob 5: $\int x^3 \ln x dx$	Ta $u = \ln x$ och $dv = x^3 dx$. Vad blir v då?
$\int x e^x dx$	Ta $u = x$ och $dv = e^x dx$. Vad blir du ? Vad blir v då?
(G) AD/6.1-Prob 2: $\int (x + 3)e^{2x} dx$; omvandla integralen med lämpliga substitutioner till formen $\int v e^v dv$	Ta $u = x + 3$ först, ta konstanterna utanför integralen, en variabel byte till med $2u = v$, städa konstanterna en gång till

enkla variabel substitution

Integralen att räkna	Tips
(G) AD/6.1-Prob 2: $\int (x + 3)e^{2x} dx$; omvandla integralen med lämpliga substitutioner till formen $\int ve^v dv$	Ta $u = x + 3$ först, ta konstanterna utanför integralen, en variabel byte till med $2u = v$, städa konstanterna en gång till
Omvandla integralen $\int \frac{dx}{2+3x}$ till $\int \frac{du}{u}$	Ta $u = 2 + 3x$ och städa konstanterna (så att de förflyttas utanför integralen)
Med smart variabel byte räkna $\int x^2(3x - 2)^{10} dx$	$u = 3x - 2$ för att få en polynom i u som är enkelt att integrera, och byta tillbaka
Med smart variabel byte räkna $\int x \sin(4x - 5) dx$	$u = 4x - 5$, omgruppera, och städa konstanterna
Omvandla till $\int \frac{du}{u}$: (a) $\int \frac{dx}{1-x}$; (b) $\int \frac{dx}{1+x}$; (c) $\int \frac{dx}{3+2x}$	(a) $u = 1 - x$; (b) $u = 1 + x$; (c) $u = 3 + 2x$

Find the integrals of the piecewise continuous functions

$$33. \int_0^{3\pi/2} |\cos x| dx$$

$$34. \int_1^3 \frac{\operatorname{sgn}(x-2)}{x^2} dx$$

$$38. g(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{if } 1 < t \leq 3 \end{cases} \text{ over } [0, 3]$$

grundläggande integraler med substitution

Integral	substitution
$\int \frac{dx}{1+x^2}$	$x = \tan u$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$x = \sin u$
Visa att $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$ kan omvandlas till $\int \frac{du}{\cos u}$	$x = \frac{1}{\cos u}$

Viktiga integraler vi använder ofta

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1} \frac{x}{a} + C \quad (a > 0, |x| < a)$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + C \quad (a > 0)$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + C \quad (a > 0)$$

integraler av rationella funktioner

Integral	tips
$\int \frac{dx}{1-x^2}$	konjugat regeln
$\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)}$	Matchande konstanter: $\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$
$\int \frac{dx}{4+x^2}$	variabel byte $x = 2u$
$\int \frac{dx}{4-x^2}$	konjugat regeln och variabel byte $x = 2u$
$\int \frac{dx}{8-4x+x^2}$	Kvadrat komplementering: $x^2 - 4x + 8 = (x-2)^2 + 4$ och variabel byte $x - 2 = u$ och senare $u = 2v$.

ADAMS/6.2 integraler av rationella funktioner

integraler av rationella funktioner kan förenklas till bara två typer $\int \frac{dx}{(1 \pm x)^n}$ eller $\int \frac{ax+b}{(1+x^2)^n} dx$; huvudsats är att varje polynom kan faktoriseras i en produkt av termer med två typer $(x - a)^m$ eller $(x^2 + ax + b)^m$; i princip dessa integraler är enklaste att räkna (dock jobbigaste, med många steg). Här vi ser hur man räknar dessa integraler. Viktig mellansteg.

(G) omvandla integralen $\int \frac{dx}{(1+x+x^2)^3}$ till formen $\int \frac{(a+bu)du}{(1+u^2)^c}$. Vad är a, b, och c lika med?

(G) omvandla integralen $\int \frac{x dx}{(1-x+x^2)^{11}}$ till formen $\int \frac{(a+bu)du}{(1+u^2)^c}$. Vad är a, b, och c lika med?

ADAMS/6.2 integraler av rationella funktioner

integraler av rationella funktioner kan förenklas till bara två typer $\int \frac{dx}{(1 \pm x)^n}$ eller $\int \frac{ax+b}{(1+x^2)^n} dx$; huvud sats är att varje polynom kan faktoriseras i en produkt av termer med två typer $(x - a)^m$ eller $(x^2 + ax + b)^m$; i princip dessa integraler är enklaste att räkna (dock jobbigaste, med många steg). Här tittar vi på hur man räkna den jobbigare integralen.

Problem: Hitta en rekursiv formula för $I_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$. Räkna I_1 och I_2 .

Tips: Använd partiellintegration med $dv = dx$ och $u = \frac{1}{(1+x^2)^n}$.

Mellansteg $I_n = \frac{x}{(1+x^2)^n} - \int (-n)(1+x^2)^{-n-1} 2x dx$ $x = \frac{x}{(1+x^2)^n} +$

$2n \int \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} dx$. För att räkna $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} dx$ skriv den om som $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} dx =$

$\int \frac{1+x^2-1}{(1+x^2)^{n+1}} dx = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} - \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = I_n - I_{n+1}$. Pussla ihop det hela till: $I_n =$

$\frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n(I_n - I_{n+1})$ och uttryck I_{n+1} som funktion av I_n och byt $n \rightarrow n - 1$.

Förstår du varför? För att kunna räkna rekursionen!