Contents

1 W1 2
2 W2 gränsvärdet, kontinuitet, och derivata grunder 2
2.1 Gränsvärdet 2
2.1.1 Den intuitiva definitionen och enklare algebraiska gränsvärden 2
2.1.2 Typer av gränsvärden men hänsyn till riktningen 4
2.1.3 Den formella definitionen med epsilon/delta 5
2.1.4 Komplicerade (icke algebraiska) gränsvärden 7
2.1.5 Vad händer om gränsvärdet finns inte? 9
2.1.6 Tekniker att hitta gränsvärdet 13
2.1.7 En särskild teknik som är extra bra att kunna: variabel byte 14
2.1.8 Tillämpningar av gränsvärdet: sned asymptot 15
2.2 Kontinuitet: i punkt och i mängd 16
2.2.1 Varför skall en IT ingenjör bry sig om kontinuitet? 16
2.2.2 Kontinuitet: rita grafen utan att lyfta penna 17
2.2.3 Kontinuitet i en punkt: den förmäla definitionen 17
2.2.4 Exempel: visa med epsilon-delta argument att *f(x)* är kontinuerlig 18
2.2.5 Kontinuitettillämpningar 18
2.3 Derivata grunder 20
2.3.1 Den formella definitionen 20
2.3.2 Differentialer – icke infinitesimala 21
2.3.3 Skillnaden mellan $f'(x)$ och $(fx)'$ 23
2.3.4 Derivata definitionen tillämpning - Exempel 1: Derivata av $sinx$. 23
2.3.5 Derivata definitionen tillämpning - Exempel 2. Derivata av ex 24
2.3.6 Derivata definitionen tillämpning - Exempel 3: andra derivator 25
2.3.7 Den geometriska tolkningen av derivata 25
2.3.8 Derivata regler: intro 26
2.3.9 Derivata regler: kedjeregel 26
2.3.10 Derivata regler: Summan, produkt, kvot 27

1 W1

2 W2 gränsvärdet, kontinuitet, och derivata grunder

Gränsvärdet, kontinuitet, och derivata hänger tätt ihop. De är bästa kompisar: Gren (gränsvärdet), Conny (kontinuitet), och Derry (derivata). De tittar på filmer tillsammans och har det kul. De har varit tillsammans sedan förskolan och hängt med genom grundskolan, gymnasiet, och just nu är på Chalmers (dock olika program). Vi kommer att diskutera vad länkar de tillsammans. Men, trots att de är bästa kompisar har de en ganska komplicerad relation till varandra för de påverkar varandra starkt i hur de beter sig, och det var så från första stunden de träffades.

(1) Det är Gren som håller gänget ihop. Det är på grund av Gren att alla andra är i gänget. Gren är en otroligt karismatisk person som alla gillar att vara omkring.

(2) Conny har starkt påverkan på Gren. Allt Conny gör härmar Gren (om f är kontinuerlig i en punkt => gränsvärdet finns i punkten) och det var så ända sedan Conny föreslog att alla skulle gå på ett plundringståg i förskolans kök (de visste att fröken gömmer en kakburk någonstans). Dock som tur är, Gren har mindre påverkan på Conny. Conny följer inte Gren. Det finns saker som Gren gör som Conny vill absolut inte göra (om funktionen har ett gränsvärde, det betyder inte att den är kontinuerlig), tex spela den urgamla videospel TETRIS. Gren älskar TETRIS.

(3) Men Conny kan inte påverka Derry alls (om f är kontinuerlig det behöver inte vara sant att f är deriverbar). Conny känner att Derry ignorerar honom ibland, jag som tex när de skulle se på det senaste Star Wars fillmer. Derry tyckte att de var för barnsliga, men för Conny Star Wars filmer är det heligaste som finns.

(4) Ja, vad skall man säga, Derry har starkt påverkan på alla. Alla följer Derry (om f är deriverbar => f är kontinuerlig => f har gränsvärdet). Ja, när Derry skulle spela TETRIS då ville Conny plötslig göra samma sak, och Gren blev glad.

Nu skall vi, utan att berätta för de, beskriva det här gänget på ett förmält matematiskt sätt.

2.1 Gränsvärdet

Hur beter sig $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ när $x \to 0$? Det är en märklig situation. Vi kan inte riktig räkna $f(0)$ men vi ser att vi kan försöka räkna tillräcklig nära 0. Om man räknar för hand då ser man att $\frac{\sin x}{x}$ för $x = 0.1, 0.01, 0.001$, o.s.v. blir en talserie som verkar närma sig 1. Man antecknar detta som

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Och ni har sett det här tidigare. Men, hur kan man formalisera detta på ett rigoröst matematiskt sätt? Hur kan vi **bevisa** att det är så. För att kunna göra det behöver vi den formella definitionen av gränsvärdet.

2.1.1 Den intuitiva definitionen och enklare algebraiska gränsvärden

Viktig att veta när man räknar gränsvärde av $f(x)$ i en punkt a är att är vi intresserade i omgivningen av punkten $x \neq a$, vi behöver inte veta f exakt just i $x = a$. Alltså $f(a)$ behöver vi <u>aldrig</u> räkna!

Ofta, studenter missar detta. När vi räknar gränsvärdet vi fullständigt struntar i vad $f(a)$ är. Och det ett motiv som finns i alla problem med gränsvärdet i boken.

Den intuitiva definitionen är i princip densamma som att använda räknaren. Vi försöker räkna funktionen i flera punkter för att få en uppfattning av trenden, närmar sig funktionsvärdet ett tal eller inte. För visa funktionen vi kan visualisera hur de beter sig i omgivningen av en punkt utan att använda räknaren. Det är ju ungefär samma som om man använder räknaren fast för visa funktioner våra hjärnor kan fungera som räknare. Och, ja, det är sant, ju mera man jobbar med sådant desto bättre blir hjärnan på att snappa upp tendenser. Så förrådet av funktioner man kan visualisera ökar med tiden.

Exempel 1: Som ett exempel, de flesta skulle inse att $\frac{1}{x} \to 0$ när $x \to \infty$. För att se detta behöver vi ingen räknare, i princip. Men för visa studenter det krävs en ansträngning att se detta. Om det är så, det absolut bästa är att (1) faktisk ta fram räknaren och testa, (2) gör en skiss a grafen $y = 1/x$.

Exempel 2 (ADAMS 1.2.EX1): Vad händer med $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ när $x \to 1$? Notera att vi kan inte räkna $f(1)$, men som sagt vi struntar i vad $f(1)$ är. Vi vill veta hur mycket är $f(1+0.1)$, $f(1+0.01)$, $f(1+0.001)$, osv. Ibland, kan vi lista ut detta utan att använda räknaren. Vi kan skriva om funktionen $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$. Nu, frågan är om vi kan fortsätta skriva $\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$, i.e. om vi kan förkorta bråket med att stryka $x-1$. Ju, enligt vanliga algebraregler det kan vi göra om $x \neq 1$; vet ni varför?[1] Kan det hända att $x = 1$? Nej, absolut inte, för vi är ju intresserade vad händer när x närmar sig 1 men blir aldrig 1. Så, nu är frågan vad händer med $x+1$ när x närmar sig 1. Vi behöver ingen räknare att se att svaret är $1+1=2$, vår hjärna kan fungera som räknaren.

> En funderare: En appendix fråga till exemplet ovan. Är $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ och $g(x) = x+1$ samma funktioner? Trotts allt, vi kan omvandla f till g med lite hjälp från algebra, inte sant?[2]

Det finns en massa problem i ADAMS med samma tema. Vill ni träna principen ”strunt i $f(a)$ men fokusera på omgivningen av $x = a$”, gå igenom följande problemen:

g.v. typ	att läsa	att träna
med räknare	1.1 Average velocity and Instantaneous Velocity	1.1.EX2; 1.1.EX4; 1.1.1-3; 1.2.EX2
$0/0$	1.2 Limits of functions	1.1.4; 1.2.11-12,14,17-18,25
$\frac{\infty}{\infty}$	1.3 Limits at Infinity and Infinite Limits	1.3.EX2; 1.3.EX3; 1.3.1-3,6,9,10
$\infty - \infty$	1.3 Limits at Infinity and Infinite Limits	1.3.28-31

[1] Vi kan dela två tal $\frac{a}{b}$ om nämnaren b är inte noll. I vårt problem har vi ett speciellt fall där $a = b$. Vad är nämnaren b? Ju det är $x-1$. Alltså $x-1$ får inte vara noll.

[2] Icke! De är inte samma funktioner, men varför? Tänk på vad är det som definierar en funktion. Visst, det uppenbara är receptet hur vi räknar från en given input (algoritmen). Men, det finns en sak till som är viktig. Kommer ni ihåg från gymnasiet vad det är? Mycket sant, f och g har inte samma algoritmer, med resultat blir alltid densamma, det vet vi. Det är den andra grejen som gör skillnaden.

Notera att tabellen innehåller inte typ $0 \times \infty$. Sådana kan ofta omvandlas till formen $0/0$ eller ∞/∞.

En funderare[3]
Anta att vi har en funktion $f: D_f \to R$. Alltså definitionsmängden är D_f. Vi vill räkna $\lim_{x\to a} f(x)$ där $a \notin D_f$. Spelar det någon roll att punkten vi räknar gränsvärdet i, alltså a, är inte i definitions mängden? Skall vi ge upp process att hitta gränsvärdet på grund av punkten ligger utanför definitions mängden? Ni kan ta som ett exempel $f(x) = \frac{x-\pi}{\sin x}$ och anta att $a = 0, \pi, 2\pi, \cdots$. Är det någon idé att försöka räkna $\lim_{x\to\pi} \frac{x-\pi}{\sin x}$?

2.1.2 Typer av gränsvärden men hänsyn till riktningen

Gränsvärden förekommer i två typer beroende hur man närmar sig punkten av intresse. Gränsvärden kan vara tvåsidiga eller ensidiga. Ensidiga kommer i två former: det högra gränsvärdet och det vänstra gränsvärdet. Studera skillnader mellan de i ADAMS. För ensidiga se ADAMS 1.2 Limits of Functions > DEF 2.

Ett bra exempel i ADAMS som ni kan studera är 1.2 Limits of functions > One-Sided Limits, EX6:

EXAMPLE 6 The signum function $\operatorname{sgn}(x) = x/|x|$ (see Figure 1.10) has left limit -1 and right limit 1 at $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0-} \operatorname{sgn}(x) = -1 \qquad \text{and} \qquad \lim_{x\to 0+} \operatorname{sgn}(x) = 1$$

Tecken funktion alltså. Den har olika gränsvärden beroende om man närmar sig 0 från höger, $x \to 0^+$, eller vänster, $x \to 0^-$. Några exempel på hur man räknar signum: $sgn(+0.5) = 1$, $sgn(-1.2) = -1$, $sgn(3) = 1$, $sgn(3.5) = 1$, $sgn(-2) = -1$. Man kan definiera signum som $sgn(x) = \frac{|x|}{x}$, eller $sgn(x) = \frac{x}{|x|}$, eller man kan skriva ganska explicit så här

$$sgn(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

Notera att $sgn(0)$ är inte definierat för det är sant att $+0 = -0$. Det är möjligt att visa programmeringsspråk tillåter att man räknar $sgn(0)$ men då antar man ett speciellt värde för $sgn(0)$, sannolikt 0, men det är viktig att kolla när man skriver kod och man använder signum. Tex Mathematica implementerar sgn så här:

[3] Svar: nej, det spelar absolut ingen roll att punkten a ligger utanför definitionsmängden. Det är precis det som är poängen med gränsvärdet att vi aldrig behöver fundera på vad $f(a)$. Om vi gör det då är vi snarare intresserade i kontinuitet.

```
In[ ]:= ?Sign
```

Symbol

Out[ ]= Sign[x] gives – 1, 0, or 1 depending on whether x is negative, zero, or positive.

```
In[ ]:= Sign[-2.3]
Out[ ]= -1

In[ ]:= Sign[3.6]
Out[ ]= 1

In[ ]:= Sign[0]
Out[ ]= 0

In[ ]:= Sign[-0]
Out[ ]= 0

In[ ]:= Sign[+0]
Out[ ]= 0
```

Det viktigaste att fokusera på och förstå är varför är det så att $\lim_{x\to 0+} sgn(x) = 1$ och $\lim_{x\to 0-} sgn(x) = -1$.

Det finns en relation mellan ensidiga och tvåsidiga gränsvärden. En viktig sats i ADAMS som utrycker relationen finns i 1.2 Limits of Functions > TH1

Relationship between one-sided and two-sided limits

A function $f(x)$ has limit L at $x = a$ if and only if it has both left and right limits there and these one-sided limits are both equal to L:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \iff \lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x) = L.$$

Det är viktig att ha en klar mental bild vad är det som pågår. Man kan tycka att det är uppenbart vad satsen säger, men testa ändå med ett bra exempel från ADAMS är 1.2 Limits of Functions > EX7:

EXAMPLE 7 If $f(x) = \dfrac{|x-2|}{x^2+x-6}$, find: $\lim_{x\to 2+} f(x)$, $\lim_{x\to 2-} f(x)$, and $\lim_{x\to 2} f(x)$.

2.1.3 Den formella definitionen med epsilon/delta

Vi kommer inte att använda den i kursen, bara då och då. Den behövs för alla bevis i boken angående gränsvärdet. Det är bra att ni vet varifrån allt börjar. Den mest exakta definitionen av gränsvärdet i matematiken är den här (ADAMS, Appendix III Continuous Functions):

The formal definition of limit

We say that $\lim_{x\to a} f(x) = L$ if for every positive number ϵ there exists a positive number δ, depending on ϵ (i.e., $\delta = \delta(\epsilon)$), such that

$$0 < |x - a| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon.$$

Exempel 1: Visa att för $f(x) = x^2$ där är så att $\lim_{x\to 3} f(x) = 9$. Svar: se 1.5.EX3 som är ett nästan identiskt problem.

Exempel 2: Visa att för $f(x) = x$ där är så att $\lim_{x\to 3} f(x) = 3$. De två siffror 3 (punkten vi räknar gränsvärdet i) och 3 (värdet att gränsvärdet) är färgkodade för att underlätta förstå uträkningen. Svar: se 1.5.EX2 som är ett nästan identiskt problem. Svar: Vi vill visa att för varje $\epsilon > 0$ någon utmanar oss med, oavsett hur liten den är, vi kan hitta en $\delta > 0$ sådan att om $|x - 3| < \delta$ då vet vi med oändlig säkerhet att $|f(x) - 3| < \epsilon$. I kort, för angiven epsilon vi vill hitta delta sådan att

$$|x - 3| < \delta \Rightarrow |f(x) - 3| < \epsilon$$

Om man nu matar in vad funktionen är får vi

$$|x - 3| < \delta \Rightarrow |x - 3| < \epsilon$$

Nu gäller det att komma ihåg vad $|x - 3| < \delta$ och $|x - 3| < \epsilon$ föreställer geometrisk. Villkoret $|x - 3| < \delta$ beskriver en 1d-cirkel (”boll” eller ”disk”) med origo i 3 och radie delta som vi kan anteckna som $D(3, \delta)$. På samma sätt $|x - 3| < \epsilon$ föreställer en 1d-cirkel (boll, disk) med origo i 3 och radie ϵ; $D(3, \epsilon)$. Ok, nu snackar vi riktiga mängder i tallinje, alltså intervaller. Vi vill alltså hitta en δ sådan att

$$x \in D(3, \delta) \Rightarrow x \in D(3, \epsilon)$$

Detta betyder att $D(3, \delta)$ måste vara en intervall som är en del av $D(3, \epsilon)$. Rent formellt vi vill ha att $D(3, \delta) \subset D(3, \epsilon)$ är sant, alltså bollen med radien δ måste vara mindre än bollen med radien ϵ. Notera att bägge två bollar är centrerade i samma punkt i tallinjen, alltså kring 3. Där räcker att välja $\delta < \epsilon$, tex, $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ och detta försäkrar att den första bollen är mindre än den andra bollen.

Exempel 3: Visa att för $f(x) = 1$ där är så att $\lim_{x\to 3} f(x) = 1$. Svar: Vi vill visa att för varje $\epsilon > 0$ någon utmanar oss med, oavsett hur liten den är, vi kan hitta en $\delta > 0$ sådan att om $|x - 3| < \delta$ då vet vi med oändlig säkerhet att $|f(x) - 1| < \epsilon$. I kort, för angiven epsilon vi vill hitta delta sådan att

$$|x - 3| < \delta \Rightarrow |f(x) - 1| < \epsilon$$

Om man nu matar in vad funktionen är får vi

$$|x - 3| < \delta \Rightarrow |1 - 1| < \epsilon$$

alltså

$$|x - 3| < \delta \Rightarrow 0 < \epsilon$$

Men, vi vet att epsilon vi utmanas med är större än noll, så vi ser att vi kan välja vilken delta vi vill.

Exempel 4: Visa att $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$. Svar: 1.5.EX6.

2.1.4 Komplicerade (icke algebraiska) gränsvärden

Det finns förstås gränsvärden som är komplicerade och vi kan inte använda den vanliga algebra (intuition) för att hitta de. Ett typiskt exempel är

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$$

Den finns ett bra hjälpmedel att hantera sådana gränsvärden: L'Hopital regler som säger att under visa förutsättningar vi kan göra så här

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Notera att L'Hopital regeln är inte sådan: $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$; studenter gör sådant fel ibland. Förutsättningar är superviktiga. Innan man använder LH man måste veta att det går att använda. Man kan använda LH om det är sant att

$$LH1:\ \lim_{x\to a}f(x)=0\ \ \&\ \ \lim_{x\to a}g(x)=0$$

eller

$$LH2:\ \lim_{x\to a}f(x)=\infty\ \ \&\ \ \lim_{x\to a}g(x)=\infty$$

där symbolen "&" står för den logiska operationen "och". Ett typisk fel studenter gör är att de använder LH när den inte går att använda. I boken det finns en massa bra problem att öva LH på:

g.v. typ	att läsa	att träna
$0/0$	4.3 Indeterminate Forms	4.3.1-3
∞/∞	4.3 Indeterminate Forms	1.3.1, 1.3.4, 1.3.5
$0\cdot\infty$	4.3 Indeterminate Forms	4.3.Table 4; $\lim_{x\to 0+} x\ln\frac{1}{x}$

Jag har undersökt litteraturen för att hitta ett enkelt bevis för LH regel. Faktisk, det enklaste beviset jag har hittat är den i boken. Så, för beviset se 4.3 Indeterminate Forms > TH3. Beviset rymmer i en liten paragraf (se under).

LH1:

Suppose the functions f and g are differentiable on the interval (a,b), and $g'(x)\neq 0$ there. Suppose also that

(i) $\lim_{x\to a+} f(x)=\lim_{x\to a+} g(x)=0$ and

(ii) $\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$ (where L is finite or ∞ or $-\infty$).

Then

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=L.$$

Om man litar på den generaliserade medelvärde satsen då allt flyter:

PROOF We prove the case involving $\lim_{x\to a+}$ for finite a. Define

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if } a < x < b \\ 0 & \text{if } x = a \end{cases} \quad \text{and} \quad G(x) = \begin{cases} g(x) & \text{if } a < x < b \\ 0 & \text{if } x = a \end{cases}$$

Then F and G are continuous on the interval $[a, x]$ and differentiable on the interval (a, x) for every x in (a, b). By the Generalized Mean-Value Theorem (Theorem 16 of Section 2.8) there exists a number c in (a, x) such that

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(c)}{G'(c)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Since $a < c < x$, if $x \to a+$, then necessarily $c \to a+$, so we have

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c\to a+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = L.$$

LH2:

The second l'Hôpital Rule

Suppose that f and g are differentiable on the interval (a, b) and that $g'(x) \neq 0$ there. Suppose also that

(i) $\lim_{x\to a+} g(x) = \pm\infty$ and

(ii) $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (where L is finite, or ∞ or $-\infty$).

Then

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Again, similar results hold for $\lim_{x\to b-}$ and for $\lim_{x\to c}$, and the cases $a = -\infty$ and $b = \infty$ are allowed.

Notera att kravet egentligen är inte att nämnaren och täljaren skall gå mot oändlighet bägge två, snarare det räcker att täljaren bara går till oändligheten! ADAMS säger att beviset för LH2 är ganska komplicerad, så vi låter blir att diskutera den helt.

Några exempel där det går att använda LH

Exempel: Räkna $L = \lim_{x\to 0+} x^x$. Det enklaste sättet att räkna så här: $L = \lim_{x\to 0+} e^{\ln(x^x)} = \lim_{x\to 0+} e^{x\ln(x)} = e^{\lim_{x\to 0+} x\ln(x)}$. Om vi kan räkna $K = \lim_{x\to 0+} x\ln x$ då kan vi hitta L. Hur räknar man K som är av typ $K = 0 \cdot \infty$ för $\lim_{x\to 0+} x = 0$ och $\lim_{x\to 0+} \ln x = -\infty$. Vi kan räkna på två sätt. Sätt 1: Försök använda LH. $K = \lim_{x\to 0+} x\ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} \frac{-x^2}{x} = -\lim_{x\to 0+} x = 0$. Så får vi $L = e^K = e^0 = 1$. Sätt 2: Variabel byte med $x = e^{-u}$. $K = \lim_{x\to 0+} x\ln x = \lim_{u\to\infty} e^{-u}\ln e^{-u} = \lim_{u\to\infty} e^{-u}(-u) = -\lim_{u\to\infty} ue^{-u}$. Här, den exponentiella funktionen ”tävlar” mot en polynom. Den

exponentiella funktionen vill ”driva” gränsvärdet till noll, $\lim_{u\to\infty} e^{-u} = 0$, men polynomet vill driva den till oändligheten, $\lim_{u\to\infty} u = \infty$. Den exponentiella funktionen alltid vinner, som visas i nästa exempel.

Exempel: Räkna $\lim_{u\to\infty} ue^{-u}$. Om man litar in på att den exponentiella funktionen vinner, vi kan räkna med hjälp av LH. Vi skriver om uttrycket så att det går att använda LH: $\lim_{u\to\infty} ue^{-u} = \lim_{u\to\infty} \frac{u}{e^u}$. På det sättet ser vi att gränsvärdet är av typ $\frac{\infty}{\infty}$. Om man använder LH då $\lim_{u\to\infty} \frac{u}{e^u} = \lim_{u\to\infty} \frac{(u)'}{(e^u)'} = \lim_{u\to\infty} \frac{1}{e^u} = 0$.

En funderare![4]
Nu när vi vet att $\lim_{x\to 0+} x^x = 1$, går det att hitta konstanterna $a > 0$ och $b > 0$ så att $$\lim_{x\to 0+} (x^a)^{(x^b)} \neq 1$$

Exempel: Beräkna $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$. Det här exemplet kan lösas med hjälp av LH2. Notera att vi använder LH2 trotts att bara nämnaren går mot oändligheten. Om vi använder LH2 då får vi $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1'}{x'} = \lim_{x\to\infty} \frac{0}{1} = 0$.

Några exempel där det inte går att använda LH:

Exempel: Beräkna $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$. Det går att se att gränsvärdet inte finns. Om man glömmer att kolla villkoret för att kunna använda LH då kan man få fel resultat. Här gäller det att komma ihåg att LH1 går inte att använda för det är bara nämnaren som går mot 0. Om vi tex felaktig försöker räkna och blind använder LH1 utan att tänka då får vi fel resultat: $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1'}{x'} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{1} = 0.$

Exempel: Beräkna $\lim_{x\to 1+} \frac{x}{\ln x}$. Det här är ett exempel från boken, se 4.3 Indeterminate Forms > EX3. Här går det inte att använda LH1 för nämnaren går mot 0 men täljaren gör inte det.

2.1.5 Vad händer om gränsvärdet finns inte?

Hittills har vi diskuterat flera exempel på gränsvärden som fanns. När gränsvärdet inte finns det kan inte finnas på flera olika sätt. För att gränsvärdet skall finnas den måste vara ett tal till att börja med. Sedan, om gränsvärdet är tvåsidig då måste den finnas från bägge två sidor, och den vänstra och den högra gränsvärdet måste vara lika. Vi har inte riktig pratat om notationen att beskriva de fall där gränsvärdet finns inte och vilka typer av misslyckande gränsvärdet det finns därute.

Som ett exempel, $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ finns inte på grund av ganska mycket. Allt är emot den stakars funktionen. Till att börja med, gränsvärdet beter sig annorlunda om man närmar sig 0 från den vänstra eller den högra sidan. Sedan, även om man väljer det enda sida då är gränsvärdet begriplig, dock är oändligm, är inte ett tal. Alltså $\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x}$ finns inte men kan beskrivas som $+\infty$, men definitivt inte som $-\infty$. På samma sätt $\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x}$ kan beskrivas som $-\infty$.

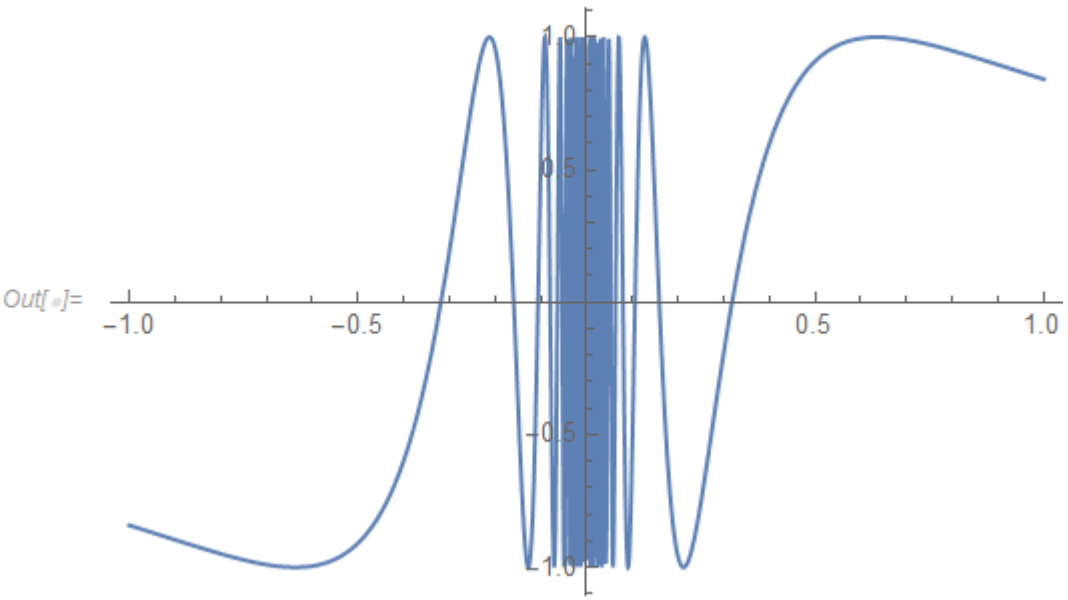
[4] Tips: räkna som vanligt, använd att $\exp(\ln(\blacksquare)) = \blacksquare$, alltså använd att den exponentiella funktionen och logaritmen är inverser till varandra. Man kunde försöka med $\ln(\exp(\blacksquare)) = \blacksquare$ men det hjälper inte så mycket.

Hur skall man anteckna sådana beteende, när vi vett att gränsvärdet är oändlig och vi vet tecknet på oändligheten? Det är lite missvisande om vi skriver $\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}=+\infty$. Om vi använder ”=” då vill vi betona att gränsvärdet är ett tal och finns och här är det missvisande. Kanske vi kunde skriva $\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}\sim+\infty$ där ”~” står för ”beter sig som” för att undvika använda ”=” tecknet.

Ett enkelt fall av en funktion som har inte tvåsidig gränsvärdet är om bägge det högra (HGV) och det vänstra gränsvärdet (VGV) finns men inte är lika dana. Typiskt exempel av sådant beteende är tecken funktionen $sgn(x)$ för $HGV=\lim_{x\to 0+} sgn(x)=1$ men $VGV=\lim_{x\to 0-} sgn(x)=-1$ och de är inte lika.

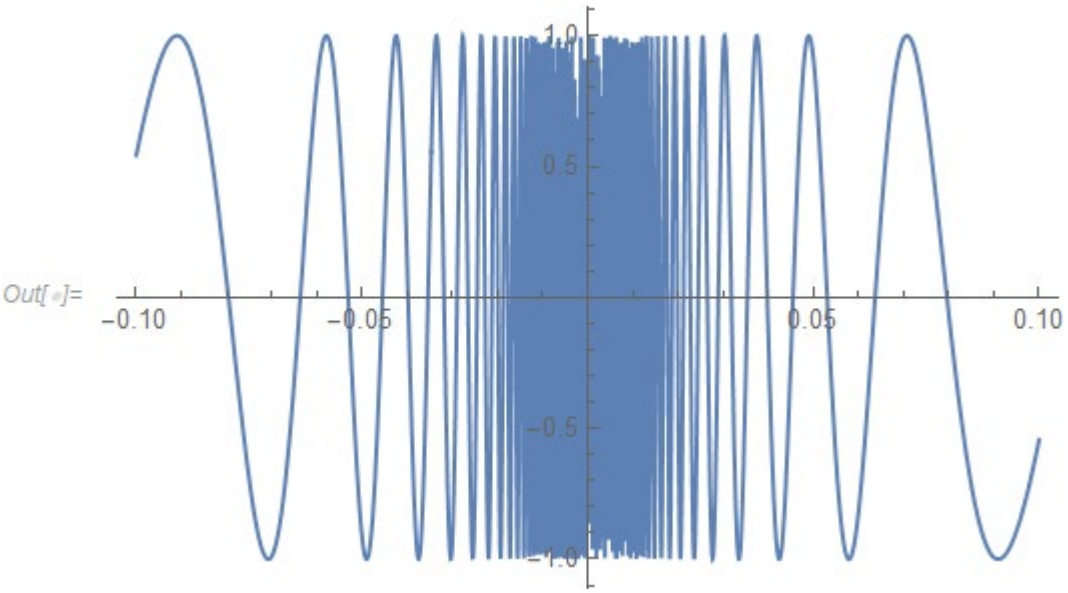
Kan det hända att det ensidiga gränsvärdet inte finns men inte på grund av det är oändligt men på grund av andra skäl? Man måste kämpa att konstruera sådana funktioner, men de finns. En notorisk ”buse” är funktionen $f(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Vi ser att den är begränsad mellan -1 och 1, $-1\le\sin\left(\frac{1}{x}\right)\le 1$, men vi vet inte vad gränsvärdet i 0 är. För de flesta funktioner så kan vi gissa från grafen, men för den här funktionen. Titta på grafen under. Kan vi säga vad händer med funktionen när $x\to 0$? Nej.

```
In[ ]:= Plot[Sin[1/x], {x, -1, 1}]
```



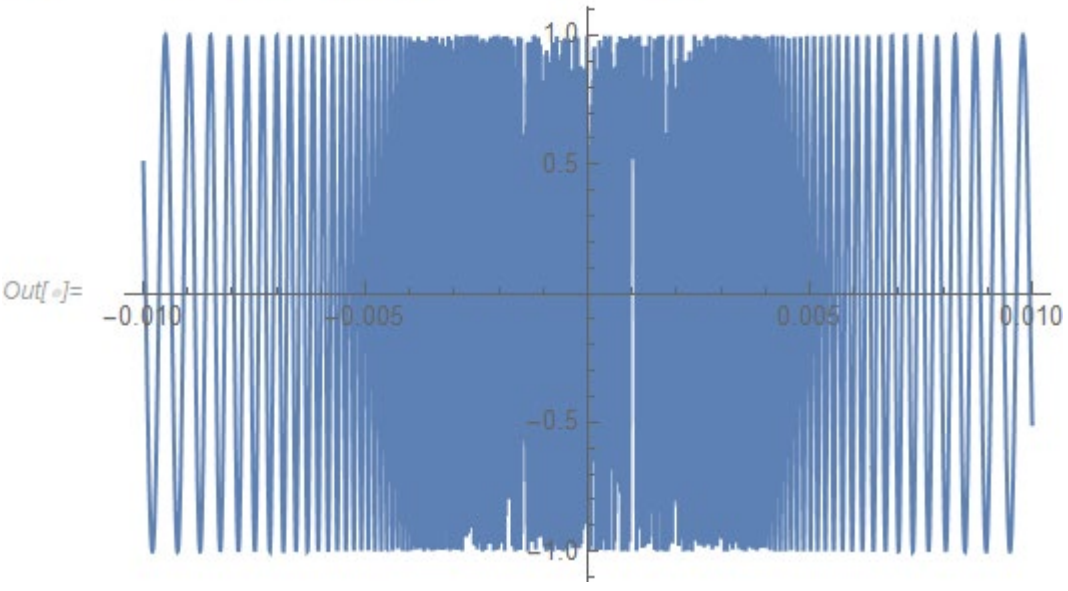
Man kan ju tycka att det bli bättre om vi zoomar in, då kan vi kanske se någon struktur. Försök själva men någon grafritnings program ni litar på. Här är vad Mathematica visar när man zoomar in 10 gånger:

```
In[•]:= Plot[Sin[1/x], {x, -0.1, 0.1}]
```



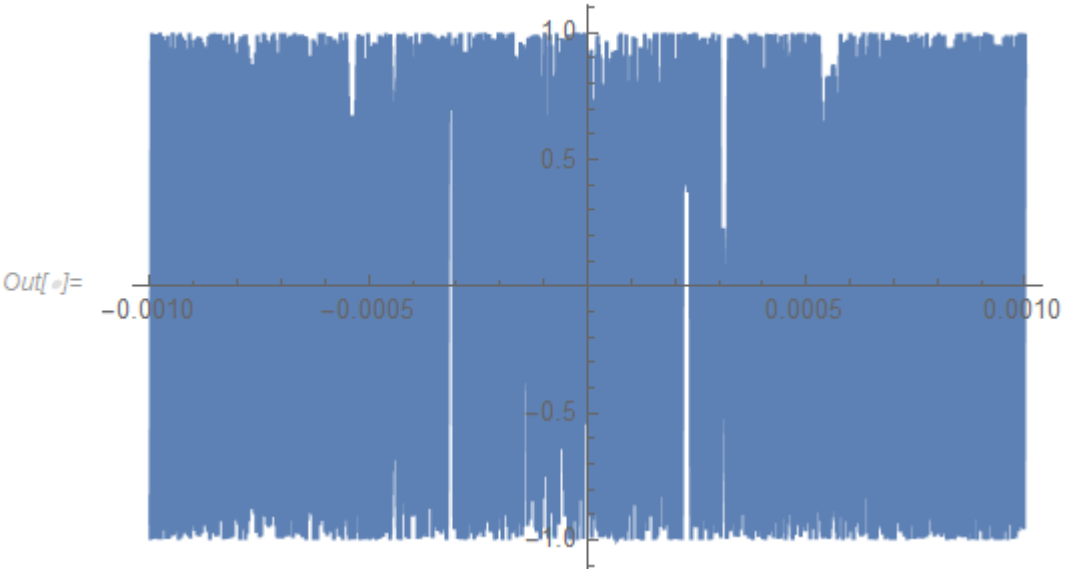
Det blir inte bättre. Inte sant? Den här funktionen är en notorisk buse som sagt. Den vägrar ”uttala” sig om hur $f(x)$ beter sig när $x \to 0$. Det blir verkligen inte bättre om man är envis och försöker zooma ännu mera in, kanske 100 gånger:

```
In[•]:= Plot[Sin[1/x], {x, -0.01, 0.01}]
```



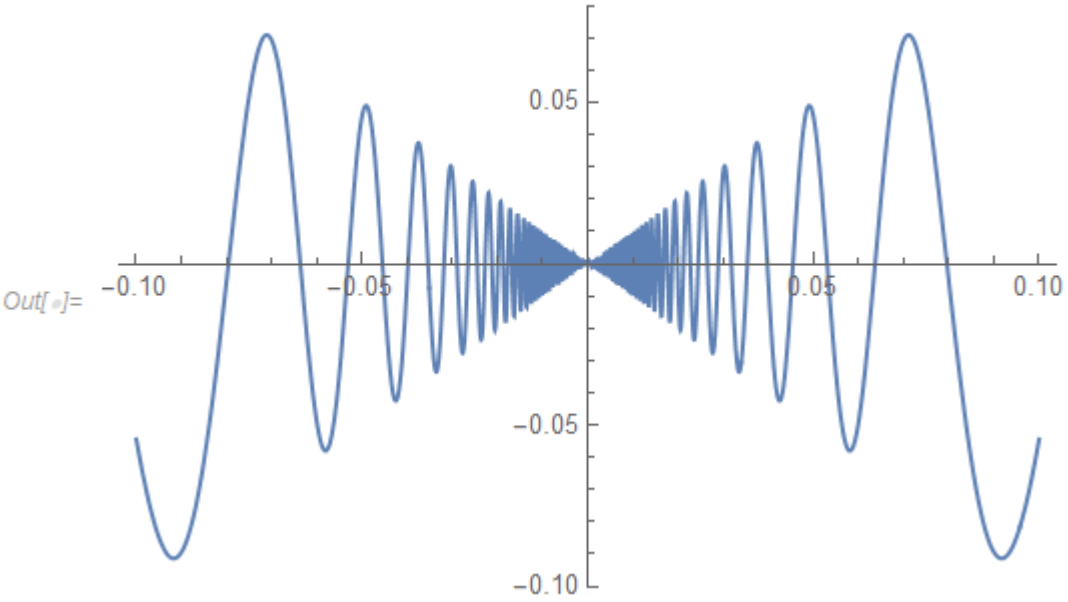
eller 1000 gånger

```
In[•]:= Plot[Sin[1 / x], {x, -0.001, 0.001}]
```



Snacka om att vara ”ostyrig”. Men, om vi modifierar funktion en smula, tex $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ då blir det bättre

```
In[•]:= Plot[x Sin[1 / x], {x, -0.1, 0.1}]
```



Vi ser att trotts att det är en hel del ”oreda”[5] kring $x = 0$ att $\lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. Hur vet vi det med absolut säkerhet? Det finns en sats i ADAMS som hjälper: 1 Limits and Continuity > TH4 The Squeeze Theorem:

[5] Varför ”oreda”? Den här funktionen är lite bättre än $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ men kan också ”busa”. Tex, vad tror ni att derivatan är i 0? Kan vi räkna den?

The Squeeze Theorem

Suppose that $f(x) \le g(x) \le h(x)$ holds for all x in some open interval containing a, except possibly at $x = a$ itself. Suppose also that

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L.$$

Then $\lim_{x\to a} g(x) = L$ also. Similar statements hold for left and right limits.

Från grafer ovan vi ser att $-|x| \le x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \le |x|$ och då kan man tillämpa satsen (The Squeeze Theorem) med följande ”översättning”

kompendiet	satsen
$-\|x\|$	$f(x)$
$x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$	$g(x)$
$+\|x\|$	$h(x)$
0	L
0	a

Ett alternativt sätt att räkna är tillämpa $\lim_{x\to 0}$ ■ på hela uttrycket $-|x| \le x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \le |x|$. Enligt teoremet kan vi göra så. När vi gör så får vi $\lim_{x\to 0}(-|x|) \le \lim_{x\to 0}\left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) \le \lim_{x\to 0}|x|$. På grund av att $\lim_{x\to 0}|x| = \lim_{x\to 0}(-|x|) = 0$ kan vi skriva $0 \le \lim_{x\to 0}(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)) \le 0$ och då måste det vara att $\lim_{x\to 0}\left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0$.

2.1.6 Tekniker att hitta gränsvärdet

Ofta i matematiken, tekniker att göra någonting, eller hjälpmedel man kan använda att lösa problem, förekommer i form av satser. Konstig nog studenter brukar tycka annorlunda. Man ser satser som bara ett problem till att förhålla sig till. Och mycket sant, det finns komplicerade satser i matematiken sådana att bara fatta vad satsen säger kräver en omänsklig mängd matematisk träning. Som tur är, satser som hjälper oss att räkna gränsvärden är enkla att förstå, och enkla att använda. De inte svåra att bevisa heller, men kommer inte att ge oss på bevis. Förstås, ni anar att det har med epsilon-delta att göra.

I kort, satser som vi använder är följande

$$\lim_{\blacksquare}(f+g) = \lim_{\blacksquare} f + \lim_{\blacksquare} g$$

$$\lim_{\blacksquare}(f\cdot g) = \lim_{\blacksquare} f \cdot \lim_{\blacksquare} g$$

$$\lim_{\blacksquare}\frac{f}{g} = \frac{\lim_{\blacksquare} f}{\lim_{\blacksquare} g}$$

$$\lim_{\blacksquare} f(g) = f\left(\lim_{\blacksquare} g\right)$$

I alla formler symbolen $\lim_{\blacksquare}$ kan stå för $\lim_{x\to a}$, $\lim_{x\to a^+}$, $\lim_{x\to a^-}$, $\lim_{x\to\infty}$, eller $\lim_{x\to-\infty}$. Sist men inte minst, vi har en viktig regel som möjliggör ”städa konstanter” principen. Om k är en konstant då

$$\lim_{\blacksquare}(kf) = k\lim_{\blacksquare} f$$

Alltså vi kan alltid dra konstanter ur framför gränsvärdettecken. De reglerna är så enkla att använda att vi använder dem utan att vi tänker på att vi använder dem. För att se mera detaljer om satser läs igenom

1.2 Rules for Calculating Limits, TH2

För bevis av satsen, om någon är intresserad, se

1.5 Using the Definition of Limit to Prove Theorems

Limit Rules

If $\lim_{x\to a} f(x) = L$, $\lim_{x\to a} g(x) = M$, and k is a constant, then

1. **Limit of a sum:** $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = L + M$
2. **Limit of a difference:** $\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = L - M$
3. **Limit of a product:** $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = LM$
4. **Limit of a multiple:** $\lim_{x\to a} kf(x) = kL$
5. **Limit of a quotient:** $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$, if $M \neq 0$.

If m is an integer and n is a positive integer, then

6. **Limit of a power:** $\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^{m/n} = L^{m/n}$, provided $L > 0$ if n is even, and $L \neq 0$ if $m < 0$.

If $f(x) \leq g(x)$ on an interval containing a in its interior, then

7. **Order is preserved:** $L \leq M$

Rules 1–6 are also valid for right limits and left limits. So is Rule 7, under the assumption that $f(x) \leq g(x)$ on an open interval extending from a in the appropriate direction.

2.1.7 En särskild teknik som är extra bra att kunna: variabel byte

Exempel 1: Man kan tycka att det är konstig att

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} x$$

men det är faktisk sant. Vi börjar från $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}$ och gör variabel byte $u = 1/x$. Vi vet att på grund av variabelbytet vi har gjort det måste vara sant att $ux = 1$. Alltså om $x \to \infty$ då måste det vara så att $u \to 0$ för u och x i produkt måste vara 1. Som ett exempel ta $x = 10$ och $u = 1/10 = 0.01$, eller $x = 1000$ och $u = 1/1000 = 0.001$. Då kan vi skriva

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = \lim_{u\to 0} u$$

När man räknar gränsvärdet vi kan ”döpa om” variabeln till vad vi vill, så vi väljer att döpa om den till x igen

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\lim_{u\to 0}u=\lim_{x\to 0}x$$

Vad är förvirrande här är att i början och slut är det samma x med punkterna vi räknar gränsvärdet i är annorlunda, ∞ mot 0, och funktionerna är annorlunda, $1/x$ mot x.

Exempel 2: Typiskt känt exempel är den naturliga konstanten som kan skrivas på två sätt

$$e=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

Alltså man räknar på samma sätt som för det första exemplet:

$$e=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\quad|\quad variabel\ byte\ 1\colon x\to u$$

$$e=\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}\quad|\quad byte\ 2\colon döp\ om\ variabel\ till\ x, alltså\ u\to x$$

$$e=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\quad|\quad ta\ bort\ färgen$$

$$e=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

Notera att vid variabel byte 1 måste vi vara försiktiga att ändra punkten vi räknar gränsvärdet i, alltså byt från $x\to\infty$ till $u\to 0$. Men, notera också att vid byte 2 vi bara döper om variabeln, så vi behöver inte ändra punkten vi räknar gränsvärdet i, det blir samma från $u\to 0$ till $x\to 0$.

2.1.8 Tillämpningar av gränsvärdet: sned asymptot

Ett typiskt problem i analys är att undra hur grafen av en funktion $f(x)$ ser ut när x blir stort (till höger eller till vänster). I princip vi vill hitta en approximation så att vi kan skriva

$$f(x)\approx k_1x+m_1,\ \ x\to+\infty$$

$$f(x)\approx k_2x+m_2,\ \ x\to-\infty$$

Notera en viktig grej: Funktionen kan ha olika asymptoter till vänster och till höger. Ofta, när vi diskuterar sned asymptot glömmer vi det och bara skriver

$$f(x)\approx kx+m,\ \ x\to\pm\infty$$

I visa fall går att hävda att funktionen liknar en rak linje, och det är just för sådana situationer termen ”sned asymptot” är reserverad för. Naturligtvis, det finns exempel på funktioner som liknar inte den raka linjen när x blir stort; tex $f(x)=x^2+x+1+1/x$ liknar x^2 mycket mera än den liknar $x+1$, inte sant? Det är någonting ni har gjort under gymnasiet, så vi kommer inte att orda mycket om det. Om ni har inte gjort detta under gymnasiet, eller om ni vill fräscha upp, läs igenom:

4.6. Asymptotes; 4.6.EX1-EX2.

Om ni har fattat vad gränsvärdet är för någonting då borde det inte bli några svårigheter med detta.

Det finns två sätt att hitta sneda asymptoter.

- För rationella funktioner vi kan hitta asymptoter med polynomdivision (som ni har gjort under gymnasiet); för hur man gör se 4.6.EX3. Fördelen av det här sättet är att man slipper tänka för mycket på gränsvärdet. Men, en praktisk nackdel är att det kan blir svårt att dela polynomer och man kan göra misstag. Dock det finns ett djupare problem: Vad gör man om funktionen är inte rationell?
- Kanske det nya är att kunna hitta sneda asymptoter (plural för det finns två, åt vänster och åt höger, kan vara lika men behöver inte) från kravet $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-(kx+m)]=0$. För hur man tänker se 4.6.DEF7 och 4.6.EX3. Fördelen med det här sättet är att vi ofta kan använda den även om funktionen är inte rationell.

Typiskt tentaproblem ser ut så här:

2. Går det att bestämma konstanten a så att funktionen har en sneddasymptot lika med $y=x+1$? Om ”ja” ange a och förklara hur du har valt den, om ”nej” förklara varför det går inte att välja ett a.

$$f(x)=\frac{x^3+ax^2+x}{x^2-1}$$

2.2 Kontinuitet: i punkt och i mängd

Vi kommer att prata om varför är det fel att säga

> Sätt 1: Funktionen $f(x)$ är kontinuerlig.

men rätt att ange

> Sätt 2: Funktionen $f(x)$ är kontinuerlig **i ”plats beskrivning”**.

”Plats beskrivning” är förstås inte en gatuadress, men beskrivning av en mängd; det kan vara en enda punkt, flera punkter, intervall, kombination av intervaller eller definitionsmängd. Fast vi ofta använder Sätt 1 när vi diskuterar kontinuitet av en funktion, det är Sätt 2 vi faktisk menar. I vilka punkter är funktionen kontinuerlig? Det är denna fråga som vi är intresserade i.

2.2.1 Varför skall en IT ingenjör bry sig om kontinuitet?

Vad skulle hända om ni får lov att slippa lera er sådant? Ju, en vacker dag kommer att programmera en kontrollenhet för en pryl. Sådana ofta tar input från olika sensorer, och data skickas till kontrollenheten, som kan styra respons. Sensor kan mäta olika grejer som tex flöde av vätska igenom ett rör, temperatur i omgivningen, acceleration (om gyroskopen är inbyggda), osv. Responsen kan vara i form av motorstyrka, temperaturkontroll, öppning av en kran som skall styra vattenflöde eller liknande. **Vad man vill är att försäkra att koden ni skriver kommer att resultera i en smidig respons av prylen**, oavsett om det är en vattenkokare, en stor anläggning i form av ett vattenverk, en drönare, en självkörande bil, eller en satellit. Jag vill gärna vilja köpa sådant som ni kommer att hjälpa bygga. Vad skulle hända om ni designar en felaktig kontrollenhet som styr medicinsk utrustning som reglerar hur mycket strålning skall användas vid undersökningen.

2.2.2 Kontinuitet: rita grafen utan att lyfta penna

Intuitivt, vi säger att funktionen är kontinuerlig om det går att rita grafen utan att lifta pannan från pappret. Men, det kommer en viktig modifiering: Vi måste kunna rita grafen **utan att lifta pennan i funktionens definitions mängd**. Som ett exempel varför är detta viktig, man kan tycka att funktionen $f(x) = 1/x$ är inte kontinuerlig. Men den är kontinuerlig för den farliga punkten $x = 0$ ligger utanför definitions mängd av f. Definitionsmängden är inte hela R men $R\backslash\{0\}$. Alltså när vi pratar om kontinuitet är det superviktig att veta i vilka punkter vi analyserar kontinuitet. Är den bara en punkt, några få punkter, ganska många punkter, eller hela definitionsmängden. I kort, den grundläggande konceptet är **kontinuitet i en punkt**.

2.2.3 Kontinuitet i en punkt: den förmäla definitionen

Den mest abstrakta definitionen av kontinuitet i en punkt är, inte så konstig, i epsilon-delta form (Appendix III Continuous Functions, AIII.DEF1):

Continuity of a function at a point

A function f, defined on an open interval containing the point a, is said to be continuous at the point a if

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a);$$

that is, if for every $\epsilon > 0$ there exists $\delta > 0$ such that if $|x - a| < \delta$, then $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

Epsilon-delta formen är ganska abstrakt, och det tar tid att meningen bakom definitionen sänker sig i den omedvetna. För att göra livet enklar för oss ADAMS är snäll och ger oss ett alternativ som vi kommer att använda:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Den alternativa definitionen examineras noggrann på den skriftliga tentan! Ingen klarar kursen utan den.

Det här definition av kontinuitet specificerar tvåsidig kontinuitet. En funktion kar också vara högerkontinuerlig eller vänsterkontinuerlig, det är bara att byta till motsvarande gränsvärdet tecken. Alltså en funktion är högerkontinuerlig om följande är sant

$$\lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$$

och vänster kontinuerlig om följande gäller

$$\lim_{x \to a-} f(x) = f(a).$$

En funktion kan också vara kontinuerlig i en kantpunkt om det är höger- eller vänster-kontinuerlig, beroende på vilken kant vi betraktar. Tex om vi betraktar en funktion $f: [1,2] \to R$, då i den vänstra kanten, alltså $x = 1$, funktionen kan vara högerkontinuerlig (eller inte). På samma sätt, om vi betraktar den högra kanten, alltså $x = 2$, då funktionen kan vara vänsterkontinuerlig. Notera att det är superfel att säga att en funktion är högerkontinuerlig i den högra kanten, eller att en funktion vänsterkontinuerlig i den vänstra kanten.

2.2.4 Exempel: visa med epsilon-delta argument att *f(x)* är kontinuerlig

Några exempel att träna på:
Exempel 1. Visa att $f(x) = 1$ är kontinuerlig i hela R. Tips: börja kolla att den är kontinuerlig i $x = 2$.
Exempel 2. Visa att $f(x) = x$ är kontinuerlig i hela R.
Exempel 3. Visa att $f(x) = x^2$ är kontinuerlig i hela R.
Alla exempel liknar det vi har tittat på tidigare när vi har diskuterar den förmäla definitionen av gränsvärdet. Så se 1.5.EX2-EX3 för hur man gör. Vid sidan av dessa exempel som finns uträknade i ADAMS, det finns två styck videor som handlar om två liknande problem. Se under mappen ”Kompendiet videor”. Två styck videor som starkt rekommenderas är ”`epsilon-delta exempel 1.mp4`” (hur man löser problem 1.5.7 i ADAMS) och ”`epsilon-delta exempel 2.mp4`” (hur man löser problem 1.5.8 i ADAMS) visar hur man räknar med epsilon-delta argumentet.

2.2.5 Kontinuitettillämpningar

Som sagt, i matematiken, stöd för att lösa problem kommer i form av satser. Kolla att antaganden stämmer då får du resultat gratis. Satser i matematiken används för att bevara kunskapen och göra livet enklare för de som kommer efter oss. Det viktigaste satsen som hjälper oss jobba med kontinuerliga funktioner finns i

Appendix III, TH1 Combining Continuous Functions

Combining continuous functions

(a) If f and g are continuous at the point a, then so are $f + g$, $f - g$, fg, and, if $g(a) \neq 0$, f/g.

(b) If f is continuous at the point L and if $\lim_{x\to a} g(x) = L$, then we have

$$\lim_{x\to a} f\big(g(x)\big) = f(L) = f\Big(\lim_{x\to a} g(x)\Big).$$

In particular, if g is continuous at the point a (so that $L = g(a)$), then $\lim_{x\to a} f\big(g(x)\big) = f\big(g(a)\big)$, that is, $f \circ g(x) = f\big(g(x)\big)$ is continuous at $x = a$.

(c) The functions $f(x) = C$ (constant) and $g(x) = x$ are continuous on the whole real line.

(d) For any rational number r, the function $f(x) = x^r$ is continuous at every real number where it is defined.

Det finns också i

1.4.TH6 Combining Continuous Functions

Combining continuous functions

If the functions f and g are both defined on an interval containing c and both are continuous at c, then the following functions are also continuous at c:

1. the sum $f + g$ and the difference $f - g$;
2. the product fg;
3. the constant multiple kf, where k is any number;
4. the quotient f/g (provided $g(c) \neq 0$); and
5. the nth root $(f(x))^{1/n}$, provided $f(c) > 0$ if n is even.

Och en viktig komponent är

1.4.TH7 Composites of Continuous Functions are continuous

Composites of continuous functions are continuous

If $f(g(x))$ is defined on an interval containing c, and if f is continuous at L and $\lim_{x\to c} g(x) = L$, then

$$\lim_{x\to c} f(g(x)) = f(L) = f\left(\lim_{x\to c} g(x)\right).$$

In particular, if g is continuous at c (so $L = g(c)$), then the composition $f \circ g$ is continuous at c:

$$\lim_{x\to c} f(g(x)) = f(g(c)).$$

(See Exercise 37 in Section 1.5.)

Vi kommer att fortsätta prata om några viktiga frågor.

- Hur kan vi använda matematiska satser för att konstruera kontinuerliga funktioner?
- Hur kan vi använda satser för att bedöma om en funktion är kontinuerlig: behövs för att bygga säker kod som kraschar inte?
- Hur kan vi använda kontinuitets definition för att fixa ”dålig” funktion: behövs för att bygga säker kod som kraschar inte; i boken tekniken heter

1.4 Continuity > Continuous Extensions and Removable Discontinuities; 1.4.EX7-8

Som ett exempel betrakta ett problem som (alltid) förekommer på den skriftliga tentamen.

4. Vi betraktar en funktion $f: R \to R$ definierad som

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^{13} + 3x^8 - 5}{x - 1} & x \neq 1 \\ c & x = 1 \end{cases}$$

Går det att definiera konstanten c så att funktionen $f(x)$ är kontinuerlig i R? Ange villkor för kontinuitet och visa tydligt hur du använder den för att lösa problemet.

Hur löser vi detta? Vi använder satser ovan på ett konstruktivt sätt. Om $a(x)$ är kontinuerlig, och $b(x)$ är kontinuerlig, då vet vi att $c(x) = a(x)/b(x)$ är kontinuerlig i alla punkter där $b(x) \neq 0$. Vad betyder detta egentligen. Ju, det betyder att $f(x)$ är kontinuerlig för alla punkter där $x \neq 1$. Satsen garanterar att för alla avillkor är de sant att $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Vi behöver inte kolla alla dessa punkter för det är satsen som hjälper oss. Det enda punkten där funktionen är möjligtvis inte kontinuerlig är $x = 1$. I princip, funktionen är inte alls definierad där. Men, vi kan definiera den så att funktionen blir kontinuerlig. Det är bara att räkna gränsvärdet när $x \to 1$, kolla om det finns, och helt enkelt definiera funktionen så att $f(1) = \lim_{x\to 1} f(x)$.

Varför skall en IT ingenjör veta om sådant? Ju, för att undvika skriva kod som kraschar. Här är ett exempel av en kod som kraschar då och då:

```
real function dumhet(real x)
real a,b,c
   a = sin(3*(x-2))
   b = x-2
```

```
   c = a/b
return c
```

Ser ni vad problemet är? Ju, varje gång vi anropar funktionen med $x = 2$ koden kommer att krascha. Spelar ingen roll om det är en kod man kör på laptop. Men det kunde spela roll om det är en kod som styr en satellit, inte sant?

Hur kan vi fixa koden? Vi kan fixa problemet med en speciell teknik som heter ”continuous extension”. Om funktionen är ok i de flesta punkter utom i ett ända, då går det att fixa just i denna punkt. Om gränsvärdet finns i den farliga punkten då kan man definiera funktionen så att värdet av funktionen i punkten blir exakt lika med gränsvärdet: $\lim_{x\to 2} \frac{\sin(3(x-2))}{x-2} = f(2)$. Man kan visa (gör det snälla) $\lim_{x\to 2} \frac{\sin(3(x-2))}{x-2} = 3$. Alltså det kloka vore att definiera $f(2) = 3$. Notera att från början är det inte alls tänkt att man skall räkna f i $x = 2$. Nu, med lite fines, skall vi tillåta det. Det är precis vad tekniken handlar om.

Hur skal vi omvandla det här till koden? Enkelt:

```
real function dumhet_inte_alls(real x)
real a,b,c,gränsvärdet
   gränsvärdet = 3
   if(x=2) then return gränsvärdet
   // här är vi säkra att x ≠ 2
   a = sin(3*(x-2))
   b = x-2
   c = a/b
return c
```

2.3 Derivata grunder

Luke, om du jagas av Darth Vader och försöker rymma i ett rymdskepp, hur kan du veta hur snabbt ditt rymdskepp rör sig eller accelererar i varje tidpunkt?

Alla dessa frågor har en matematisk fråga gemensamt: **Kan vi beskriva hur mycket en funktion ”ändrar sig” i en punkt?** Tex kan vi säga hur mycket funktionen $f(t) = t^2$ ändrar sig i stunden $t = 1$? Ni har pratat om sådant under gymnasiet utan någon rigorös matematisk argumentation, eller blev ni tillsagda att ”lita på” att visa saker ”stämmer” eller att ”det går att visa”. Som en uppfräschning kommer vi nu att prata om saker ni har blivit tillsagda att ”lita på”: **derivata av enklare funktioner**, **deriverings regler** för enklare kombinationer av funktioner,

2.3.1 Den formella definitionen

Vad är derivata? Det finns två sätt att tänka om derivatan. Först, man kan tänka sig att derivata föreställer en operator som tuggar på en hel funktion och producerar en annan funktion. Tex vi börjar med sinus och derivatan av det blir cosinus. Den utsprida användning av derivata tabeller leder till att man kan tänka så. Det är en process som liknar kod nedanför

```
real function räkna_derivata(function f, real a)
   // den här funktionen räknar derivatan numerisk
   // f - funktionen vi vill räkna derivata av
   // a - punkten vi vill räkna derivata i
   real dx, deltaf, kvot
   dx = 0.1
   deltaf = f(a+dx) - f(x)
   kvot = deltaf/dx
   return kvot
end
```

De flesta programmeringsspråk tillåter att man skickar en funktion som argument (dock inte alla). Vi skickar funktionen vi vill räkna derivatan på, och vi också skickar som argument punkten vi vill räkna derivatan i. Till exempel, vi kunde använda koden att räkna derivatan av $\sin x$ i $x = \frac{\pi}{4}$ med `räkna_derivata(sin, pi/4)`.

Förmält, derivata definieras som (se 2.1.DEF1)

$$\big(f(x)\big)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Nämnaren är så viktig att vi reserverar en speciell symbol för att beskriva den:

$$\Delta(f(x)) = f(x+\Delta x) - f(x)$$

Men notationen $\Delta(\blacksquare)$ derivatan kan skrivas om i kortare form

$$(f(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

Notera att jag inte har skrivit $f'(x)$ men har använt $(f(x))'$ istället. Skillnaden mellan dessa två är liten, alltså ganska filosofisk, men finns, och jag vill betona vad skillnaden är. Diskussionen förtjänar ett litet kapitel för sig själv.

2.3.2 Differentialer – icke infinitesimala

Notationen för differential:

$$\Delta\big(f(x)\big) = f(x+\Delta x) - f(x)$$

kräver lite extra uppmärksamhet för det kan kännas ganska abstrakt första gången man ser någonting sådant. Ibland vi skriver kortare på det här sättet,

$$\Delta\big(f(x)\big) \to \Delta f(x) \to \Delta f$$

alltså vi tappar några parenteser först, och sedan tappar vi argumentet till funktionen oskcå. Vi kan skriva om ekvationen för differentialer på flera olika sätt beroende på uträkningen vi gör, som ett exempel vi kan skriva en och samma sak på olika sätt

$$f(x+\Delta x) = \Delta\big(f(x)\big) + f(x)$$

$$f(x+\Delta x) = \Delta f(x) + f(x)$$

$$f(x+\Delta x) = \Delta f + f$$

Notera att vi inte kan förkorta $f(x+\Delta x)$ ytterligare, tex genom att tappa argumentet som att skriva f, för då vet vi inte om vi menar f i referenspunkten x eller den nya punkten $x+\Delta x$. Om vi skriver bara f då menar vi verkligen f i referense punkten x, alltså $f(x)$ och inte $f(x+\Delta x)$.

Ekvationen den gråa rektangeln definierar vad symbolen Δ(någonting) betyder. Vi alltid antar att vi har en referenspunkt x, och studerar små skillnader kring den.

Exempel: Vad är $\Delta(\sin(x))$ lika med? Svar: $\Delta(\sin(x)) = \sin(x+\Delta x) - \sin(x)$.

Exempel: Vad är $\Delta(\ln(x))$ lika med? Svar: $\Delta(\ln(x)) = \ln(x+\Delta x) - \ln(x)$.

Exempel: Vad är $\Delta(\sqrt{x})$ lika med? Svar: $\Delta\left(\sqrt{x}\right) = \sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}$.

Exempel: Vad är $\Delta(x^{1/2})$ lika med? Svar: $\Delta\left(x^{1/2}\right) = (x+\Delta x)^{1/2} - x^{1/2}$.

Exempel: Vad är $\Delta(x^2)$ lika med? Svar: $\Delta(x^2) = (x+\Delta x)^2 - x^2$.

Exempel: Vad är $\Delta(x\sqrt{x})$ lika med? Svar: $\Delta\left(x\sqrt{x}\right) = (x+\Delta x)\sqrt{x+\Delta x} - x\sqrt{x}$.

Det händer väldigt ofta att ”någonting” i $\Delta(\text{någonting})$ kan vara ospecificerad helt, eller bara till en vis del.

Exempel: Vad är $\Delta(f(x)g(x))$ lika med? Svar: I det här exemplet är ”någonting” fullständigt ospecificerad för vi har ingen information vad funktionerna f och g är. Det enda vi kan skriva är $\Delta(f(x)g(x)) = f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)$.

Exempel: Vad är $\Delta(f(x)g(x))$ lika med, om vi vet att $f(x) = x^2$ och $g(x) = \sin x$? Svar: I det här exemplet är ”någonting” fullständigt ospecificerad tills vi inser att vi vet vad funktionerna f och g är. Då kan vi skriva $\Delta(f(x)g(x)) = f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)$ och fortsätta med att använda vad f och g är: $\Delta(f(x)g(x)) = (x+\Delta x)^2\sin(x+\Delta x) - x^2\sin(x)$.

Exempel: Vad är $\Delta(f(x)g(x))$ lika med, om vi vet att $f(x+1) = x^2$ och $g(x-2) = \sin(x+4)$? Svar: Det här ett ganska konstigt exempel. Man kan tycka att vi vet allt och ingenting. Grejen är att i det här exemplet är ”någonting” specificerad fast på ett ganska krångligt sätt. Vi kan börja som vanligt med att skriva $\Delta(f(x)g(x)) = f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)$. Problemet är att vi vet bara vad $f(x+1)$ och $g(x-2)$ är, men nu måste vi kämpa för att se vad $f(x)$, $f(x+\Delta x)$, $g(x)$, och $g(x+\Delta x)$. Man gör så här för f

$$f(x+1) = x^2 \quad | \; byt\ x \to x-1 \text{ på } bägge\ sidor$$

$$f(x-1+1) = (x-1)^2$$

$$f(x) = (x-1)^2 \quad | \; ta\ bort\ färger$$

$$f(x) = (x-1)^2$$

För g vi gör likadant

$$g(x-2) = \sin(x+4) \quad | \; byt\ x \to x+2 \text{ på } bägge\ sidor$$

$$g(x+2-2) = \sin(x+2+4) \quad | \; räkna\ vad\ räknas\ kan$$

$$g(x) = \sin(x+6) \quad | \; här\ är\ 2+4=6; nu\ ta\ bort\ färger$$

$$g(x) = \sin(x+6)$$

Hur mycket är $f(x+\Delta x)$ och $g(x+\Delta x)$ då? Vi gör på samma sätt

$$f(x) = (x-1)^2 \quad | \; byt\ x \to x+\Delta x\ på\ bägge\ sidor$$

$$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x-1)^2 \quad | \; ta\ bort\ färger$$

$$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x-1)^2$$

och

$$g(x) = \sin(x+6) \quad | \; byt\ x \to x+\Delta x\ på\ bägge\ sidor$$

$$g(x+\Delta x) = \sin(x+\Delta x+6) \quad | \; ta\ bort\ färger$$

$$g(x+\Delta x) = \sin(x+\Delta x+6)$$

Pusslar vi ihop alla delar får vi

$$\Delta\big(f(x)g(x)\big) = f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x) =$$

$$= (x+\Delta x-1)^2 \sin(x+\Delta x+6) - (x-1)^2 \sin(x+6)$$

2.3.3 Skillnaden mellan $f'(x)$ och $(f(x))'$

Nu är det dags att parata om $f'(x)$ mot $(f(x))'$. De är förstås samma, men betonar olika grejer, beroende på kontext.

Kontext 1: När vi skriver $f'(x)$ då menar vi att någon har gjort slit jobbet och hittat en formel för derivata, som ofta är någonting helt annat än den ursprungliga funktionen. Alltså f' beskriver resultatet av den slitgöra någon annan har gjort. Någon har börjat med f och producerat utryck för f', som är en funktion som bara väntar på att ”attackera” en variabel x. Som ett exempel: Vi ser att $(\sin x)' = \cos x$ kan skrivas om i två steg. Steg 1: låt $f = \sin$. Steg 2: Vi vet att $f' = \cos$ alltså vi kan faktisk skriva $\sin' = \cos$.

Kontext 2: När vi skriver $(f(x))'$ då menar vi processen ”att räkna derivata av det uttrycket som stor i parentesen”. Vi kan använda det när vi vill undvika namnge funktioner. Som ett exempel vi kan skriva $(x^2+x+1)' = 2x+x$. För att jämföra med kontext 1: Vi kunde ha jobbat i två steg. Steg 1: `XkvadratPlusXPlus1`$(x) = x^2+x+1$ definierar vad funktionen är. Steg 2: någon (ofta samma person som skriver kod) gör slitgöra och hittar derivatan som är $2x+1$. Nu ger vi ett namn till uttrycket $2x+1$: `DerivatanAvkvadratPlusXPlus1`$(x) = 2x+1$.

2.3.4 Derivata definitionen tillämpning - Exempel 1: Derivata av $\sin x$.

Ok, vad är derivatan av $\sin x$ då? Det är bara att räkna

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin\ x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x - \sin x}{\Delta x}$$

och man delar uttrycket i två delar

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x\,(\cos \Delta x - 1)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \cos x \frac{\sin \Delta x}{\Delta x}$$

Efter att man har använt ”städa konstanter” principen, derivatan blir

$$(\sin x)' = \sin x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\cos \Delta x - 1)}{\Delta x} + \cos x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x}$$

En viktig fråga: varför har jag betraktat $\sin x$ och $\cos x$ som konstanter, de beror ju på x?[6]

I ADAMS ni kan se beviset för att

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\cos \Delta x - 1)}{\Delta x} = 0$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1$$

Om ni är intresserade i detaljer se 2.5 Derivatives of Trigonometric Functions, TH8 och studera beviset av satsen. Den här ritningen är viktig för att förstå beviset:

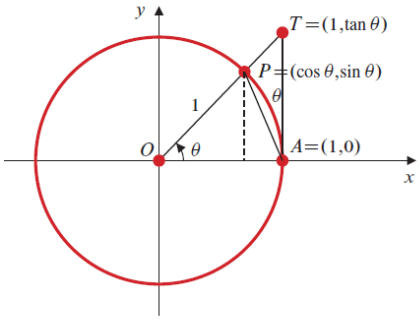


Figure 2.21 Area $\triangle OAP$ < Area sector OAP < Area $\triangle OAT$

Så, nu har vi (med lite hjälp från ADAMS) visat att

$$(\sin x)' = \cos x$$

2.3.5 Derivata definitionen tillämpning - Exempel 2. Derivata av e^x

Just när det gäller derivata av e^x ADAMS krånglar till en smula. ADAMS börjar från den logaritmiska funktionen, som i sin tur definieras som en integral, och sedan använder formel för hur man deriverar invers funktioner (implicit derivering) för att räkna derivata av $\exp x$. Krångligt.

Vi kommer att diskutera den vanligare sättet att visa vad derivatan är. Vi börjar från derivatans definition.

$$(e^x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(e^x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

Konstanten e definieras som

$$e \equiv \lim_{h \to \infty} \left(1 + \frac{1}{h}\right)^h = \lim_{u \to 0} (1+u)^{\frac{1}{u}}$$

[6] Ju, vanligtvis ja, x är en variabel men inte här. Vi kan välja vad vi vill för x, men när vi har väl valt den, då får vi inte ändra på den medan vi räknar gränsvärdet. Här x definierar referenspunkten vi räknar derivatan i. Å andra sidan, om någonting skall betraktas som variabel, då är det Δx för det är den som ”varierar”.

Vi kan enkelt visa att $\lim_{h\to\infty}\left(1+\frac{1}{h}\right)^h = \lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}$ med att göra ett variabel byte $h = 1/u$. Notera att när $h \to \infty$ då måste det vara att $u \to 0$. Då får vi

För att räkna $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}$ inför vi ett variabel byte där $e^{\Delta x} - 1 = u$ och skriver om $\Delta x = \ln(u+1)$. Då kan vi fortsätta skriva

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} = \lim_{u\to 0}\frac{u}{\ln(1+u)} = \lim_{u\to 0}\frac{1}{\frac{1}{u}\ln(1+u)} = \lim_{u\to 0}\frac{1}{\ln(1+u)^{\frac{1}{u}}}$$

Om det nu går att ”krypa in” med gränsvärdet tecken under logaritmen[7],

$$\lim_{u\to 0}\left[\ln(1+u)^{\frac{1}{u}}\right] = \ln\left[\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]$$

får man

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} = \frac{1}{\ln\left[\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]} = \frac{1}{\ln[e]} = \frac{1}{1} = 1$$

Vilket betyder att vi har visat att $(e^x)' = e^x$.

2.3.6 Derivata definitionen tillämpning - Exempel 3: andra derivator

I tabellen finns några exempel på hur man kan räkna derivator av några kända funktioner

$f(x)$	$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$	$\frac{\Delta f}{\Delta x}$	$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}$	läs mera	att träna
1	$1-1=0$	$\frac{0}{\Delta x}=0$	0	2.1 Tangent lines and their slopes	2.1.EX1, 2.1.EX2, 2.1.EX5, 2.2.EX1, 2.2.EX2, 2.2.13, 2.2.19
x	$x+\Delta x-x=\Delta x$	$\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$	1		
x^2	$(x+\Delta x)^2-x^2 = = 2x\Delta x+(\Delta x)^2$	$\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x} = = 2x+\Delta x$	$2x$		
$\sin x$	se texten	se texten	$\cos x$		
e^x	se texten	se texten	e^x		

2.3.7 Den geometriska tolkningen av derivata

Vad förställer derivatan grafisk? Ni är sannolikt bekanta med vad derivatan betyder geometrisk. Om inte ADAMS förklarar det väldigt bra i

2.1 Tangent Lines and Their Slopes

[7] Det går att göra så. Kolla satsen ovan: ”Composites of continuous functions are continuous”. Alla villkor är på plats som satsen kräver. Vi vet att $\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}} = e$ och den naturliga logaritmen är kontinuerlig i e.

Kolla speciellt

2.1.DEF1 Nonvertical tangent lines

Några bra problem att träna på är:

2.1.1, 2.1.3, 2.2.5-6

2.3.8 Derivata regler: intro

De flesta av er vet hur man tillämpar olika derivataregler. Jag kommer att anta att ni redan kan sådana regler. Om inte, eller om ni vill fräscha upp gamla gymnasiet kunskaper studera tabellen under. Skillnaden från gymnasiet är att vi kommer att titta lite närmare varifrån sådana regler kommer ifrån.

ämne	att läsa	att träna
potensregel	2.3 Differentiation rules > Sums and Constant multiples > General Power Rule	2.2.34, 2.2.39, 2.3.EX3, 2.3.1, 2.3.2, 2.3.3, 2.3.4, **2.3.8**, **2.3.9**
summa/differens	2.3 Differentiation rules > Sums and Constant multiples	2.3.EX1, 2.3.1, 2.3.2, 2.3.3
produktregel	2.3 Differentiation rules > The product rule	2.3.EX3, 2.3.10, 2.3.11, **2.3.35**
kvotregel	2.3 Differentiation rules > The Quotient Rule	2.3.EX9, 2.3.13, 2.3.17, 2.3.21, **2.3.33**
kedjeregel	2.4 The Chain Rule	2.4.EX2, 2.4.1, 2.4.4, 2.4.9, 2.4.22, **2.4.23**, **2.4.29**

Ett typiskt problem från den skriftliga tentamen som testar att ni kan derivatareglerna ser ut så här:

6. Funktionen f är definierad som nedan. Beräkna den andra derivatan av $f(x)$, alltså $f''(x)$.

$$f(x) = x^2 \ln x - x^2 \sin x + 3x^4 + xe^x$$

2.3.9 Derivata regler: kedjeregel

The Chain Rule

If $f(u)$ is differentiable at $u = g(x)$, and $g(x)$ is differentiable at x, then the composite function $f \circ g(x) = f(g(x))$ is differentiable at x, and

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Kedjeregel kan fusk bevisas så här. Låt oss betrakta $h(x) = f(g(x))$. Derivata av h är

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta h}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\big(g(x+\Delta x)\big) - f(g(x))}{\Delta x} = *$$

som kan skrivas om

$$* = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\big(g(x+\Delta x)\big) - f\big(g(x)\big)}{g(x+\Delta x) - g(x)} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$*= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x)+\Delta g)-f(g)}{\Delta g}\frac{\Delta g}{\Delta x} = \lim_{\Delta g \to 0, \Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta g}\frac{\Delta g}{\Delta x}$$

om man kan nu dela den sista gränsvärdet med hänsyn till regel $\lim_{\blacksquare}(a \cdot b) = \lim_{\blacksquare} a \cdot \lim_{\blacksquare} b$ då kan vi dela ovan i två delar

$$h'(x) = \lim_{\Delta g \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta g} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x}$$

vilket är exakt den berömda kedjeregeln på grund av

$$f'(g) = \lim_{\Delta g \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta g} = \lim_{\Delta g \to 0} \frac{f(g+\Delta g)-f(g)}{\Delta g}$$

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$$

Det kritiska är om $\lim_{\blacksquare}(a \cdot b) = \lim_{\blacksquare} a \cdot \lim_{\blacksquare} b$ går att använda eller inte. Om ni är intresserade i ett mer rigoröst bevis och ner det här sättet att tänka är ok, se

2.4 The Chain Rule > Proof of the Chain Rule (Theorem 6)

Det riktiga matematiska beviset är en smula mera invecklat än den jag har presenterat. Det jag har visat er i kompendiet (se ovan) är snarare en minnesteknik. Om ni har tappat ljussabel och har Darth Vader framför er, ”use the force”: ni kan använda den om ni glömmer kedjeregel då kan vi bevisa den på plats

$$f\big(g(x)\big)' = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta g}\frac{\Delta g}{\Delta x} = f'(g)g'(x)$$

Kanske det svåraste med kedjeregel är allt notation omkring om man behöver derivera en komplicerad funktion med en lång kedjan av argument. Som ett exempel anta att ni behöver räkna derivata av $k(x)$ med

$$k(x) = f\Big(2+3g\big(x-5h(x^2+7)\big)\Big)$$

Först skall man betrakta som svarta lådan allt som stor under f,

$$k(x) = f(u)$$

och då kan man räkna

$$k'(x) = f'(u)u'(x)$$

Nu blir det lite enklare för den inre funktionen $u(x)$ har är beskrivet med funktioner som har lite kortare lista av argument

$$u(x) = 2+3g\big(x-5h(x^2+7)\big)$$

2.3.10 Derivata regler: Summan, produkt, kvot

Derivata regeln för summa eller differens är, i princip, ganska enkelt att bevisa

$$(f \pm g)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f \pm g)(x+\Delta x)-(f \pm g)(x)}{\Delta x} = *$$

som kan skrivas om som

$$*= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)\pm[g(x+\Delta x)-g(x)]}{\Delta x}=$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\pm\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}=f'(x)\pm g'(x)$$

Et enklare notation att följa kunde vara

$$(f\pm g)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(f\pm g)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f\pm\Delta g}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}\pm\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta g}{\Delta x}=f'\pm g'$$

Man kan bevisa produktregeln på liknande sätt

$$(f\cdot g)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(f\cdot g)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(f+\Delta f)(g+\Delta g)-fg}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{fg}+g\Delta f+f\Delta g+\Delta f\Delta g-\cancel{fg}}{\Delta x}=$$

$$=g\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}+f\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta g}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f\Delta g}{\Delta x}=$$

$$=gf'+fg'+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}\lim_{\Delta x\to 0}\Delta g=$$

$$=gf'+fg'+f'\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta g=$$

$$=gf'+fg'+f'\cdot 0=f'g+fg'$$

Kvotregel är en smula mera komplicerad men principer är samma

$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\left(\frac{f}{g}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{f+\Delta f}{g+\Delta g}-\frac{f}{g}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\frac{fg+g\Delta f-(fg+f\Delta g)}{(g+\Delta g)g}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\frac{\Delta fg-f\Delta g}{(g+\Delta g)g}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta f}{\Delta x}g-f\frac{\Delta g}{\Delta x}}{(g+\Delta g)g}=$$

$$=\frac{\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}g-f\frac{\Delta g}{\Delta x}\right)}{\lim_{\Delta x\to 0}(g+\Delta g)g}=$$

$$=\frac{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}g-f\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta g}{\Delta x}}{(g+0)g}=$$

$$=\frac{f'g-fg'}{g^2}$$