Contents

1 W1 Gymnasiematte: påminnelse om saker vi behöver 1
2 W2 gränsvärdet, kontinuitet, och derivata grunder 1
3 W3 Derivata tillämpningar 1
3.1 Differentialer: dx, Δx 2
3.2 Differentialer: df, Δf 5
3.3 Differentialer: några exempel 6
3.4 Den grundläggande differentialregeln (GDR) 7
3.5 Linjär approximation 9
3.6 Noggrannheten av punktapproximation 10
3.7 Noggrannhet av linjär approximation 12
3.8 Relationen mellan den grundläggande differentialregeln och MVS 13
3.9 Hur vi tolkar differentialer med flera variabler 13
3.10 Om vi behöver approximera med högre grads polynomer 15
3.11 O() notationen 17
3.12 Hur jobbar man med differentialkalkyl rent praktisk? 20
3.13 Procentuellökning 21
3.14 Att derivera uttryck som inte är helt specificerade 23
3.15 Implicit derivering 24
3.16 Approximation i oändligheten: tillämpningar till snedasymptot 31

1 W1 Gymnasiematte: påminnelse om saker vi behöver

2 W2 gränsvärdet, kontinuitet, och derivata grunder

3 W3 Derivata tillämpningar

En viktig skillnad från gymnasiet är att studenter förväntas arbeta med differentialkalkyl. För att kunna sådant, är det viktig att förstå vad begreppet **differential** betyder. Jag har märkt att studenter har det svårt att begripa vad dx föreställer. Å ena sidan vill man ju ha $dx = 0$ och t.o.m. arbetar med dx som det vore en nolla, å andra sidan dx får inte vara noll. Vilket är det då? Kan inte läraren bestämma sig? Det är det som blir svårt. Grejen är att vad vi gör med dx beror på kontexten vi analyserar problemet i om vi får betrakta dx som noll eller inte. Ett problem för studenter också är att de inte kan riktig skriva ”rent” matematik med differentialer. Så vi kommer att orda noggrant om det också. Så, låt oss börja med ett litet kapitel om differentialer innan vi ger oss på allt annat, så att ni fattar vad symboler betyder och hur vi brukar utrycka sådana idéer med användning av

matematiska symboler. Det kommer att bli en hel det upprepningar i texten, för vi kommer att prata om en och samma sak på olika sätt, så att ni ser hur olika sätt att tänka brukar leda till identiska matematiska uttryck. På det sättet varje student kan välja ett sätt enligt personliga preferenser.

Varför behöver vi differentialer? För att göra differentialkalkyl.

Varför behöver vi differentialkalkyl? Ofta handlar det om att vi kan räkna funktionen i en punkt, som vi kallar för referenspunkt, och sen vill räkna värdet i en punkt som ligger nära intill referenspunkten. Som ett exempel, om referenspunkten är $x = 1$ då kan vi betrakta funktionen i $x = 1 + \Delta x$. Att ”ligga nära intill” i det här fallet betyder att $\Delta x \ll 1$; Som ett exempel till, om referenspunkten $x = 10$ då ”grannpunkten” är $x = 10 + \Delta x$ och att ”ligga nära intill” betyder att $\Delta\, x \ll 10$.

Som ett exempel, anta att vi skulle vilja räkna $sqrt(50) = sqrt(49 + 1)$ men har inte räknaren vid hands, eller vi vill inte använda räknaren. Steg 1: Med hjälp av differentialkalkyl man kan se ganska fort att $sqrt(49 + dx) = 7 + \frac{dx}{14}$ om $dx \to 0$. Vi vet att kravet $dx \to 0$ kan vara orealistisk för $\Delta x = 1$ men vi gör det ändå. Steg 2: Byta tillbaka från dx till Δx. Då har vi $sqrt(49 + \Delta x) \approx 7 + \frac{\Delta x}{14}$ med $\Delta x = 1$ som ger till slut $sqrt(49 + 1) \approx 7 + \frac{1}{14}$.

3.1 Differentialer: dx, Δx

Differentialer förkommer i två former, med det latinska lilla ”d” framför en symbol ■, eller med den stora Grekiska ”delta” framför en symbol

$$d\blacksquare$$

$$\Delta\blacksquare$$

här har jag som vanligt mörknat ner symbolen för att ögat inte skall dras till det som inte är viktig. Vad är skillnaden mellan dessa två? ADAMS skriver om detta ganska kort, så det är därför jag kommer att orda mycket om det. För det ADAMS skriver kolla

2.2 The Derivative > Differentials

Man tänker så här om differentialer.

Symbolen Δx: I kompendiet antecknas ibland som Dx≡ Δx; Den beskriver någonting som är ett litet tal, numerisk sett, men vi vill inte skicka den precis till noll på stubinen. På det sättet kan Δx upplevas som någonting ”statisk”, dock med förmågan att minska. Jag skulle vilja nämna att Δx förkommer väldigt mycket i numeriska applikationer av envariabelanalys. Området heter **numerisk analys**, och det är synd att det inte finns i större utsträckning på Chalmers.

I numerisk analys vill vi ha Δx ganska liten för då noggrannheten av uträkningar brukar öka, men man måste betala ett pris, vi behöver räkna mera, utföra flera steg. Det låter lite abstrakt, jag vet. Låt mig förklara med ett exempel. Anta att vi vill simulera vädret (på en dator, för att spå hur det kommer att bli imorgon). Om man vet vad vädret är nu vid tiden x sekunder, det finns algoritmer som kan säga vad vädret kommer att bli efter Δx sekunder alltså i stunden $x + \Delta x$ sekunder. Sådana algoritmer jobbar bättre när Δx är liten, och sämre när Δx är stor. Tex, det är bättre att ha $\Delta x = 0.0001$ sekunder än $\Delta x = 0.1$ sekunder. Så, om Δx är litet, då kommer vi att få en realistisk bild hur vädret kommer att bli. Vår strategi är att dela tiden från idag till imorgon in i mindre intervaller, så att tiden blir diskret, och vi räknar väderprognos vid varje diskret tidpunkt. Så brukar det gå till. Vill vi att uträkningen speglar verkligheten då vill vi ha så många tidpunkter som möjligt när vi räknar.

Men, och här kommer problemet, om vi minskar Δx då måste vi räkna i flera punkter. Datorer är snabba med kan inte räkna hur snabbt som helst. Det är alltid en balansgång hur man väljer Δx.

Om ni är osäkra, ni kan alltid anta $\Delta x = 0.1$. Alltså välja själva ett tal som anser är litet men inte är noll. Jag hör er tänka, ”hallå, men hur kan du definiera vad är ett litet tal och inte ett litet tal? Hur kan jag välja rätt?”. Mycket sant, det blir svårt om man har ingenting att jämföra med, och det är erfarenheten som ger den korrekta referenspunkten vi jämför med. Rent allmänt, utan någon konkret numerisk problem jag tittar på, brukar jag reflexmässig (som varje person som använder analys) jämföra Δx med 1. Så jag föreslår att i kursen, när vi diskuterar Δx, ”litet” betyder mycket mindre än 1.

Symbolen $\boldsymbol{dx}$: Symbolen dx beskriver ett tal som är superlitet att börja med, men håller på att blir mindre och mindre, och den blir till och med mindre medan ni läser denna text. Har den slutat minska? Nej. Den försätter att minska hela tiden. Har den slutat minska nu? Nej sa jag ju. 😊 Den minskar med varje andetag vi tar. Med en stor risk att propagera ”smutsig” notation kommer jag att skriva en ekvation som beskriver tankesättet:

$$dx = (\Delta x \,\&\, \Delta x \to 0) \;\; (Eq{:}\, dxDx)$$

Symbolen & betyder ”och” som vanligt. Ekvationen ovan är ett försök att formalisera vad dx betyder. Jag vill att ni tolkar ekvationen ovan intuitivt, som en minnesteknik, och ingenting mera.

Tal av storleksordning 0 och 1:
Tal av storleksordning 0 (TAS0): Ett typiskt tal av storleksordning 0 är dx för dx är alltid mycket närmare 0 än 1. Vi säger att sådana tal är ”infinitesimala”. Ett exempel till är $d(\sin x)$ som också är ett infinitesimal tal. Allt som ser ut så här, $d\blacksquare$, är ett infinitesimalt tal. Dock, notera att vi betraktar ■ som ett icke infinitesimalt tal.
Tal av storleksordning 1 (TAS1): Det är någonting som inte är infinitesimalt: Δx när vi inte släpper den lös mot 0 är inte infinitesimal. Det är bara när vi släpper lös Δx som i ekvationen $(Eq{:}\, dxDx)$ att den omvandlas till dx och blir infinitesimal. Men, i princip, allt som ser ut som $\Delta\blacksquare$ är inte ett infinitesimalt tal. Ofta det som står efter Δ tecknet, alltså ■, är inte ett infinitesimalt tal. I kort, varken $\Delta\blacksquare$ eller ■ är infinitesimala.
En bra minnesteknik som sammanfattar det hela är $\boldsymbol{d1 = 0}$ eller i symbolisk form $\boldsymbol{d(TAS1) = TAS0}$.

Ett konstigt uttryck: Det är en konstig grej med differentialer. Om vi tittar på det här exemplet:

$$KU = 2dx + 5dx^2 + 7dx^3$$

där $dx^2 \equiv (dx)^2$, $dx^3 \equiv (dx)^3$ och ”SU” står för ”Konstig uttryck”. Vi får faktisk lov att skriva

$$KU = 2dx + 5dx^2$$

och

$$KU = 2dx$$

men vi får inte lov att skriva

$$KU = 0$$

Varför är det så? Det är precis på grund av de ”konstiga” egenskaper ovan varför vi säger att helat uttrycket $2dx + 5dx^2$ är konstig.

Ett vanligt uttryck: Jag menar hade det stått så här

$$VU = 2 \cdot 0 + 5 \cdot 0^2 + 7 \cdot 0^3$$

där ”VU” står för ”Vanligt uttryck” då alla tre alternativ är ok

$$VU = 2 \cdot 0 + 5 \cdot 0^2$$

$$VU = 2 \cdot 0$$

$$VU = 0$$

Om vi jämför alla alternativ, som helhet, och ställer de mot varandra i en tabell, är det konstig också:

	En konstig tabell			
	$KU = 2dx + 5dx^2 + 7dx^3$		$VU = 2 \cdot 0 + 5 \cdot 0^2 + 7 \cdot 0^3$	
rad	KU alternativ	ok att skriva så?	VU alternativ	ok att skriva så?
1	$2dx + 5dx^2$	ja	$2 \cdot 0 + 5 \cdot 0^2$	ja
2	$2dx$	ja	$2 \cdot 0$	ja
3	0	nej	0	ja

Alltså den sista raden i tabellen ovan stämmer inte alls! Å ena sidan betraktar vi dx som den vore noll (i de två första raderna, rad 1 och rad 2) men å andra sidan i den sida raden (rad 3) väljer vi att inte göra så. Hur tänker man här? Det här är ett exempel av ”kan inte läraren bestämma sig, är $dx = 0$ eller är det så att $dx \neq 0$”? Låt mig visa er hur man tänker.

Vi börjar med att ”tugga” på de två sista termer i KU: $KU = 2dx + 5dx^2 + 7dx^3 = 2dx + 5dx^2\left(1 + \frac{7dx^3}{5dx^2}\right)$. Om vi tittar nu på det som står i parentesen: $\left(1 + \frac{7dx^3}{5dx^2}\right)$. Som vi sa tidigare, dx är ett litet tal, men är inte noll. Då kan vi använda vanliga algebraregler när vi jobbar med den: $\left(1 + \frac{7dx^3}{5dx^2}\right) = \left(1 + \frac{7dx}{5}\right)$. Nu vet vi att $1 \gg \frac{7dx}{5}$ så vi kan byta $\left(1 + \frac{7dx}{5}\right) \to (1)$. Det är därför vi kan skriva $KU = 2dx + 5dx^2(1) = 2dx + 5dx^2$ och nu kan vi tappa färgen: $KU = 2dx + 5dx^2$. Den här uträkningen är anledning varför den första raden (rad 1) i tabellen är ok.

Vi gör på samme sätt med det som är kvar. $KU = 2dx + 5dx^2 = 2dx\left(1 + \frac{5dx^2}{2dx}\right) = 2dx\left(1 + \frac{5}{2}dx\right) = 2dx(1 + 0) = 2dx(1) = 2dx$. Återigen vi har använt antagandet att inom parentesen är det ok att räkna så $\left(1 + \frac{5}{2}dx\right) = (1 + 0) = (1)$. Det är superviktig att inse att vi kan göra så bara i parentesen för utanför vi vet inte kontexten. Inom parentesen vi vet exakt vad vi jämför med vad. Den här uträkningen är anledningen varför är den andra raden ok (rad 2 i tabellen).

Vi kan inte fortsätta samma resonemang med $KU = 2dx$ för nu har vi ingen kontext. Vi vet inte i vilken kontext kommer det konstiga uttrycket $KU = 2dx$ att användas i. Det är därför att det är fel att skriva som i den tredje raden av tabellen. Man tänker på samma sätt om vi har x istället av siffror

$$KU = 2xdx + 5\ln x\, dx^2 + 7x^5dx^3 \xrightarrow{\text{Steg 1}} KU = 2xdx + 5\ln x\, dx^2 \xrightarrow{\text{Steg 2}} KU = 2xdx$$

I steg 1 använde vi att $5\ln x\, dx^2 \gg 7x^5dx^3$, och i steg 2 att $2xdx \gg 5\ln x\, dx^2$.

En bra allmän bra algebraregel när man räknar med differentialer att kunna är den här: I princip det är så att

$$\clubsuit dx^2 \gg \spadesuit dx^3$$

$$\clubsuit dx \gg \spadesuit dx^2$$

där ♣ och ♠ är matematiska uttryck som beror inte på dx. Alltså vi kan alltid skriva

$$\clubsuit dx^2 \pm \spadesuit dx^3 = \clubsuit dx^2\left(1 \pm \frac{\spadesuit dx^3}{\clubsuit dx^2}\right) = \clubsuit dx^2\left(1 \pm \frac{\spadesuit}{\clubsuit} dx\right) = \clubsuit dx^2(1 \pm 0) = \clubsuit dx^2$$

$$\clubsuit dx \pm \spadesuit dx^2 = \clubsuit dx\left(1 \pm \frac{\spadesuit dx^2}{\clubsuit dx}\right) = \clubsuit dx\left(1 \pm \frac{\spadesuit}{\clubsuit} dx\right) = \clubsuit dx(1 \pm 0) = \clubsuit dx$$

och hoppa över alla mellansteg. Ser vi uttrycket $KU = \clubsuit dx^{\alpha} \pm \spadesuit dx^{\beta}$ och vet att $\alpha < \beta$ då det är bara att skriva $KU = \clubsuit dx^{\alpha}$ utan någon större eftertanke.

Några exempel hur man kan tillämpa regeln ovan och förenkla ($KU = VS \rightarrow KU = HS$) uträkningen:

- $KU = 2dx + 3dx^2 \rightarrow KU = 2dx$ är ok men vi måste vara försiktiga med den bredare kontexten, och det är så med alla exempel som följer; tex om i den bredare kontexten vi har uttrycket $KU - 2dx$ då vet vi att $KU - 2dx = 2dx + 3dx^2 - 2dx = 3dx^2$. Om vi använder den förenklade uttrycket $KU - 2dx = 2dx - 2dx = 0$ då tappar vi beroendet på dx och det kan vara ett problem.[1]
- $KU = x + dx \rightarrow$ vi brukar lämna den som den är för det beror på kontexten om vi kan ta bort dx eller inte
- $KU = dx^3 + dx^5 \rightarrow dx^3$ är ok[2]
- $KU = \sqrt{dx} + dx \rightarrow \sqrt{dx}$ är ok[3]
- $KU = dx^{\frac{3}{2}} + dx^{\frac{11}{3}} \rightarrow dx^{\frac{3}{2}}$ är ok[4]

3.2 Differentialer: df, Δf

En grej som vi ofta vill göra är att räkna sådana små skillnader

---

[1] Som ett exempel, anta att vi skulle räkna

$$UMD = \frac{KU - 2dx}{dx^2}$$

där UMD står för ”uttryck med differentialer”, då är det viktig att använda den ursprungliga formen KU och inte den transformerade formen KU. Kolla vad händer:

$$UMD = \frac{KU - 2dx}{dx^2} = \frac{2dx + 3dx^2 - 2dx}{dx^2} = \frac{3dx^2}{dx^2} = 3$$

$$UMD = \frac{KU - 2dx}{dx^2} = \frac{2dx - 2dx}{dx^2} = \frac{0}{dx^2} = 0$$

Det blir inte samma resultat.

[2] men vi måste vara försiktiga med den bredare kontexten

[3] återigen, vi måste vara försiktiga med den bredare kontexten

[4] och ni vet vad jag tänkte säga 😊

$$d\big(f(x)\big) \equiv f(x+dx) - f(x) \quad (*)$$

där $f(x)$ är en funktion. Notera att ekvationen ovan definierar symbolen $d(f(x))$ och man skall inte tolka det på något annat sätt. Alltså det finns inget ”bevis” för den. Vi börjar med den. Man använder flera olika sätt att skriva om samma sak där vi siktar på att förenkla notationen $d\big(f(x)\big) \to df(x) \to df$. Som vanligt fördelen med det kortaste versionen, df, är att vi har tappat en massa symboler, och det är behaglig för ”ögat”, men läsaren måste veta vad den oberoende variabelt är, alltså x. Man vet inte heller om f skall uppfattas som en oberoende variabel eller inte. Vi kan skriva om $(*)$ till ett superkort uttryck där vi tappar så många parenteser som möjligt och tom tappar x där är det rymligt,

$$df \equiv f(x+dx) - f$$

men det är implicit att en x finns. Notera att vi inte tappar x i $f(x+dx)$. Man kan skriva om ekvationen som

$$f(x+dx) = f + df$$

Symbol x i uttrycket är viktig, det förställer **referenspunkt**. Det är det hela differentialkalkyl går på, att kunna jobba med sådana tryckt när vi studerar förändringar i värden av ett yttryck kring en referenspunkt. För att betona detta kan vi skriva ibland

$$f_{\text{ref}} = f(x)$$

Ibland vi skriver

$$f_{\text{nytt}} = f(x+dx)$$

för att betona att vi har förflyttat oss till en ny punkt som ligger bredvid referenspunkten och df blir skillnaden i funktionsvärdena mellan nytt och referenspunkt

$$df = f_{\text{nytt}} - f_{\text{ref}}$$

Visst, vi tänker på samma sätt om vi vill jobba med skillnader som inte är infinitesimala. Då skriver vi

$$\Delta(f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)$$

och kortar ner notationen på samma sätt: $\Delta f(x) \to \Delta f(x) \to \Delta f$. Som sagt, se också hur ADAMS tänker om sådant i en ganska kortfattat form:

2.2 The Derivative > The differentials

3.3 Differentialer: några exempel

Skillnader dx, df, osv kan ”gömma” sig i olika former. Här är några exempel hur man kan ”jonglera” med sådana uttryck:

Ex1: $\sin(x+dx) - \sin x$; I det här exemplet ser vi att uttrycket förställer $d(\sin x)$. Jämför med ekvationen $(*)$: använd ekvationen $(*)$ med $f = \sin$; uttrycket $\sin(x+dx) - \sin x$ är vad $d(\sin x)$ betyder.

Ex2: $\sin(x+dx)$; Exemplet kan upplevas som konstig. Hur i himmelens namn kan jag hävda att i Ex2 är det ekvation $(*)$ som gömmer sig någonstans? Alltså, hur kan jag säga att i Ex2 är det $d(\sin x)$ som ligger och ruvar? Se på: Vi använder en trick som är vanlig i matematiken, den heter ”**att addera nollan**”. Vi kan skriva om $\sin(x+dx)$ som

$$\sin(x+dx) = \sin(x+dx) + 0 = \sin(x+dx) - \sin x + \sin x = d(\sin x) + \sin x$$

Också tänk på att vi inte gör så: $\sin(x+dx) - \sin x = \sin(x+0) - \sin x = \sin x - \sin x = 0$. På sätt och vis är det ok att tänka så, men **vi aldrig tillåter att $\boldsymbol{dx = 0}$**!

Ex3: $\boldsymbol{\ln(x+dx) - \ln(x)}$; Det är precis vad $d(\ln x)$ betyder, så vill man det, kan man fortsätta skriva $\ln(x+dx) - \ln x \to d(\ln x)$, om det så skulle behövas i uträkningar.

Ex4: $\boldsymbol{\ln(x+dx)}$; På samma sätt som Ex2 vi kan skriva om Ex4 som $\ln(x+dx) = d(\ln x) + \ln x$. Själv klart, man kan använda samma trick för vilken funktion som helst:

$$f(x+dx) = f(x+dx) + 0 = f(x+dx) - f(x) + f(x) = d\big(f(x)\big) + f(x)$$

som blir en upprepning av (*).

Ex5: $\boldsymbol{(x+dx)^2 - x^2}$; som på muntan (två sätt, förklara varför dx^2 termer kan försummas). Ex5 är helt enkelt $d(x^2)$. Det är viktig att kunna bolla fram och tillbaka.

Ex6: $\boldsymbol{d(x^3)}$; Ex6 kan skrivas om som $(x+dx)^3 - x^3$. Igen, det är viktig att kunna bolla fram och tillbaka. Notera att $d(x^3)$ är inte samma som $(dx)^3$!

Ex7: $\boldsymbol{d\left(\frac{x}{x+1}\right)}$; Det här exemplet går på att visa att det som stor under d täckenet behöver inte vara enbart en polynom. Det kan verkligen vara vad som helst. Alltså nu vet vi att Ex7 betyder $d\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{x+dx}{x+dx+1} - \frac{x}{x+1}$.

3.4 Den grundläggande differentialregeln (GDR)

Allt det här skulle vara tomt hade det inte varit för den här identiteten

$$d\big(f(x)\big) = f'(x)dx$$

som jag kommer att referera till som **den grundläggande differentialregeln** som man kan skriva om med en kortare notation

$$df = f'dx$$

Ekvationen kan härledas från linjär approximation om man är geometrisk lagd, eller man kan tänka sig att detta är en direkt konsekvens av derivatans definition om man gillar algebra bättre. Som en minnesteknik ni kan använda

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \xrightarrow{\text{Steg 1}} f'(x) = \frac{df}{dx} \xrightarrow{\text{Steg 2}} f'(x)dx = \frac{df}{\cancel{dx}}\cancel{dx}$$

Steg 1: Vi går från miniräknaren sätt att tänka till analys, alltså till den eviga förminskningsprocessen; Steg 2: Multiplicera med dx. En ganska lik diskussion finns i ADAMS så ta en titt på

2.2 The Derivative > Leibnitz Notation > Figure 2.16

2.7 Using Differentials and Derivatives > Approximating Small Changes > Figure 2.25

Just nu kommer jag att visa hur man använder den grundläggande differentialregeln. Nu är vi redo att slutföra exemplen som vi diskuterade ovan. Alla exempel kan skrivas om så här:

- Ex1: $\sin(x+dx) - \sin x = \cos x\, dx$
- Ex2: $\sin(x+dx) = \sin x + \cos x\, dx$

- Ex3: $\ln(x+dx) - \ln(x) = \frac{1}{x}dx$
- Ex4: $\ln(x+dx) = \ln x + \frac{1}{x}dx$
- Ex5: $(x+dx)^2 - x^2 = d(x^2) = 2xdx$
- Ex6: $d(x^3) = 3x^2dx$
- Ex7: $d\left(\frac{x}{x+1}\right) = \left(\frac{x}{x+1}\right)' dx$

Nu vet vi en intressant sak:

Viktig at veta!
Det går alltid att omvandla
$$f(x+dx)$$
till formen
$$a(x) + b(x) \cdot dx$$
Faktisk, när vi gör omvandlingen
$$f(x+dx) \to a(x) + b(x)dx$$
då utför/gör vi differentialkalkyl!

Men vi vet någonting extra faktisk, inte sant? Vi vet att $a(x) = f(x)$ och $b(x) = f'(x)$, alltså vi vet att

$$f(x+dx) = f(x) + f'(x)dx$$

Ser ni varför är det så?[5] Jag förstår att för visa studenter det här kan kännas banalt, trivialt, eller kalla den vad ni vill, men det händer när jag diskuterar med studenter att studenter inte kan riktigt skriva ekvationen ovan på stubinen. Det krävs en ganska lång diskussion/vägledning att studenten skriver så. Det var därför jag valde att förbereda den här texten så alla kan läsa om differentialer i lugn och ro.

Och jag skulle vilja kasta in två ganska exotiska exempel.

Ex8: $\sin dx$; Det här var ett konstigt exempel, men kan förekomma. Vad gör vi nu? Här gäller det att vara ”street smart”. Vi skriver uttrycket en smula så att den liknar det vi kan $d(\sin x) = \sin(x+dx) - \sin x$; $\sin dx = \sin(0+dx) - \sin 0$ är ju samma som $d(\sin x)$ fast med $x = 0$. Jaha, då ser vi att

$$\sin dx = d(\sin x)|_{x=0} = (\cos x\, dx)|_{x=0} = \cos 0\, dx = dx$$

Ex9: $\cos dx$; Det här var ett konstigt exempel men, igen, kan förekomma. Vad gör vi nu? Vi gör på samma sätt som i exempel 8. Vi skriver om uttrycket en smula så att den liknar någonting vi kan: $\cos dx = \cos(0+dx) = \cos(0+dx) - \cos 0 + \cos 0 = d(\cos x)|_{x=0} + \cos 0 = -\sin x\, dx|_{x=0} + \cos 0 = -0 \cdot dx + 1 = 1$. OK, i det här fallet verkar det som att

$$\cos dx = 1$$

Senare när vi jobbar med Taylor satsen kommer vi att visa varför är det så. I det här exemplet är det så att i omvandlingen $f(x+dx) \to a(x) + b(x)dx$ termen $b(x)$ är lika med 0.

[5] Ganska enkelt argument: $f(x+dx) = f + df$ kombinerad med $df = f'dx$ ger $f(x+dx) = f + f'dx$, och det är bara att klistra in x på rätta ställen.

3.5 Linjär approximation

Ibland, det kan finnas ett enkelt sätt att gräva fram vad funktions värde är kring en referenspunkt, om vi har möjlighet att vet vad värdet i referenspunkten är. Tekniken heter **linjär approximation** och är den viktigaste **byggstenen av numerisk analys**! Grejen är att ganska sannolikt ni kommer inte att behöva detta medan ni är på Chalmers, men jag är ganska säkert på ni kommer att använda linjär approximation (direkt eller indirekt) när ni börjar jobba som ingenjörer. ADAMS diskuterar linjär approximation över flera kapitel, det dyker upp då och då, men grovt sett, ämnet presenteras på två sätt. Alltså samma tema förkommer i två olika former, (a) som den raka linjen, eller (b) som differential i f. Man betonar lite annorlunda perspektiv kring hela idén att approximera på ett enkelt sätt. Det är bra om ni kan bolla mellan dessa två perspektiv, så vi kommer att diskutera bägge två.

(a) Linjär approximation som den raka linjen: referenspunkten heter x_0 eller a

$$f(x) \approx y(x)$$

$$y = kx + m$$

$$f(x_0) = y|_{x=x_0}$$

$$f'(x_0) = k$$

Det här ett ganska geometriskt angreppssätt, därför bra att börja med. Se följande texten i ADAMS

2.2. The Derivative > $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$

4.9 Linear Approximations > DEF8

I princip ADAMS använder kunskapen om vad derivatan föreställer geometrisk. ADAMS jobbar med en linje som går igenom referenspunkten och är tangenten till grafen, alltså har en vis bestämd lutning. Det sista steget är ett gymnasiemate problem där man vill hitta en linje $y = kx + m$ som går igenom en känd punkt och har en känd lutning. Nämligen, vi vet att linjen går igenom referenspunkten $(x_0, f(x_0))$ och har lutningen $k = f'(x_0)$. Som sagt, resten är gymnasiet matematik som leder till $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = kx + m$. Ser vi vad k om motsvarar till?

(b) Linjär approximation som tillämpning av differentialer: referenspunkten heter x

Vi kommer att anta att funktionen går att räkna i $f_{\text{ref}} = f(x)$ och att målet är att räkna funktionen i en närliggande punkt som $f_{\text{nytt}} = f(x + \Delta x)$.

Några exempel:

- Ex1: $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 0.1\right)$
- Ex2: $\cos(\pi + 0.05)$
- Ex3: $\ln(1 - 0.15)$
- Ex4: $\sqrt{4 + 0.01}$

I Ex1 vi vet vad $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ är, men det blir svårt att räkna $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 0.1\right)$ utan räknare, inte sant? Med hänsyn till differentialkalkyl vi har diskuterat tidigare, vi ser att alla dessa exempel kan skrivas om som

- Ex1: $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \Delta x\right)$
- Ex2: $\cos(\pi + \Delta x)$

- Ex3: $\ln(1 + \Delta x)$
- Ex4: $\sqrt{4 + \Delta x}$

där Δx varierar från fall till fall; $\Delta x = 0.1$ (Ex1), $\Delta x = 0.05$ (Ex2), $\Delta x = -0.15$ (Ex3) och $\Delta x = 0.01$ (Ex4).

Med differentialer man utrycker linjär approximation så här

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x \ (LA)$$

Notera att ekvationen ovan har samma form som $f(x + dx) = f(x) + f'(x)dx$. Om man byter dx till Δx för vi ekvationen ovan. Det här ett nytt sätt att tänka! Hittills var vi vana att gå från Δx till dx, men just nu gör vi tvärtom, vi går från dx till Δx, så vi låter dx växa. För att få lite mera känsla om allt det här läs igenom

2.2 The Derivative > DEF4
2.7 Using Differentials and Derivatives > Approximating Small Changes

Men, nu när ni har bekantat är med differentialkalkyl vi kan faktisk visa det ganska fort. Det är också ett bra sätt att lära sig jobba. För det första, vi vet att approximativt är det sant att

$$f'(x) \approx \frac{\Delta f}{\Delta x} \rightarrow \Delta f \approx f'(x)\Delta x$$

och för det andra vi vet att

$$\Delta f \equiv f(x + \Delta x) - f(x)$$

Kombinerar vi de sista två ekvationerna får vi

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta f \approx f(x) + f'(x)\Delta x$$

Hemläxa: Utför approximationerna i Ex1-4 men hjälp av ekvationen (LA).

För det algebraiska sättet att visa linjär approximation se boken

2.7 Using Differentials and Derivatives > Approximating Small Changes

Det här exemplet 2.7.EX1 är speciellt värdefullt att studera. Se också

4.9 Linear Approximations > Approximating Values of Functions

där exemplet 4.9.EX3 är bra att gå igenom.

Här kommer en viktig fråga: Hur bra är den linjära approximationen?

För att svara på denna fråga behöver vi Taylor satsen. Så, vi kan inte prata om detta just nu. Men, det finns ett relaterat problem, noggrannheten av **punktapproximation**, som kan belysa problemet en smula, och är enklare, dock idéerna är samma. Alltså en perfekt sandlåda för att ni kan vänja er med det rätta sättet att tänka.

3.6 Noggrannheten av punktapproximation

Vad betyder punktapproximation? Vi utför punktapproximation om vi bara skriver

- Ex1: $\sin\left(\frac{\pi}{2}+0.1\right) \approx \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$
- Ex2: $\cos(\pi+0.05) \approx \cos(\pi)$
- Ex3: $\ln(1-0.15) \approx \ln(1)$
- Ex4: $\sqrt{4+0.01} \approx \sqrt{4}$

Vi kan inte räkna f i punkten vi är intresserade i (för Ex2 punkten vi vill verkligen räkna i är $x = \pi + 0.05$, så istället plockar vi bara en närliggande punkt som vi kan räkna i, som för just detta exempel är $x = \pi$. Hur mycket har vi "felat" då? Svaret till frågan finns i formen av medelvärdesatsen:

The Mean-Value Theorem

Suppose that the function f is continuous on the closed, finite interval $[a, b]$ and that it is differentiable on the open interval (a, b). Then there exists a point c in the open interval (a, b) such that

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

This says that the slope of the chord line joining the points $(a, f(a))$ and $(b, f(b))$ is equal to the slope of the tangent line to the curve $y = f(x)$ at the point $(c, f(c))$, so the two lines are parallel.

Det är svårt att tro att satsen hjälper oss avgöra hur bra en punktapproximation är, men den gör den faktisk. För att får en känsla om hur man använder teoremet rent allmänt kolla i boken

2.8 The Mean-Value Theorem

ni kan läsa igenom dessa problem

2.8.EX1-2

och försöka fixa dessa

2.8.1, 2.8.2, 2.8.4

OK, nu funderar ni, "jag har läst igenom medelvärdesatsen och har en känsla hur den funkar, men hur kan medelvärde satsen hjälpa oss avgöra hur bra approximationen är?" Så här: Om man tillämpar satsen med $a = x$ och $b = x + \Delta x$ då får vi

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{x+\Delta x-x} = f'(c) \quad (MVS1)$$

och enligt satsen vi vet att konstanten c ligger i intevallet

$$c \in (x, x+\Delta x)$$

Omvandlar vi formeln i $(MVS1)$ då får vi

$$f(x+\Delta x)-f(x) = f'(c)\Delta x \quad (MVS2)$$

och vi vet som vanligt att $c \in (x, x+\Delta x)$.

Alltså skillnaden mellan approximationen och det exakta värdet vi är intresserade i kan uttryckas på ett matematisk formellt sätt

- Ex1: $\sin\left(\frac{\pi}{2}+0.1\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos c\times 0.1;\ c\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}+0.1\right)$
- Ex2: $\cos(\pi+0.05)-\cos(\pi)=\sin c\times 0.05;\ c\in(\pi,\pi+0.05)$
- Ex3: $\ln(1-0.15)-\ln(1)=\frac{1}{c}\times 0.15;\ c\in(1-0.15,1)$
- Ex4: $\sqrt{4+0.01}-\sqrt{4}=\frac{1}{2\sqrt{c}};\ c\in(4,0.01)$

Under räkneövningar kan man bolla med hur kan man använda uttrycken ovan för att skatta hur bra punktapproximationen är i alla dessa fall. Hur skattar man hur bra en approximation är? Ju, målet är att kunna skriva någonting så här:

$$\left|f_{exakt}-f_{approx}\right|<\epsilon$$

där ϵ är ett litet tal, och ju mindre talet är desto bättre är approximationen. För ytterligare förklaring hur man definierar felet se texten kring

4.9 Linear Approximations > Error Analysis > error = true value − approximate value

Så vi vill hitta talen ϵ_1, ϵ_2, ϵ_3, och ϵ_4 sådana att

- Ex1: $|\sin(\pi/2+0.1)-\sin(\pi/2)\,|<\epsilon_1$
- Ex2: $|\cos(\pi+0.05)-\cos(\pi)\,|<\epsilon_2$
- Ex3: $|\ln(1-0.15)-\ln(1)\,|<\epsilon_3$
- Ex4: $\left|\sqrt{4+0.01}-\sqrt{4}\right|<\epsilon_4$

Ser ni vad f_{exakt} och f_{approx} är för alla exemplen ovan? För att se hur man hittar ϵ några bra exempel att gå igenom är 4.9.EX4 och 4.9.EX5.

3.7 Noggrannhet av linjär approximation

Studera igenom självlänsning av boken. Bra text att följa är

4.9 Linear Approximations > Error Analysis

Det blir ganska uppenbart vad ni behöver fokusera på (4.9.TH11):

An error formula for linearization

If $f''(t)$ exists for all t in an interval containing a and x, then there exists some point s between a and x such that the error $E(x)=f(x)-L(x)$ in the linear approximation $f(x)\approx L(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$ satisfies

$$E(x)=\frac{f''(s)}{2}(x-a)^2.$$

Några bra problem att träna på är

4.9.15, 4.9.19

Det viktiga är att kunna översätta teoremet ovan till notation med differentialer. Tabellen nedan kan användas för vägledning hur man gör översättningen.

objekt	formeln i boken	differentialer
referenspunkt	a	x

f i referenspunkt	$f(a)$	$f_{\text{ref}} = f(x)$
närliggandepunkt	x	$x + \Delta x$
f i närliggandepunkt	$f(x)$	$f_{\text{nytt}} = f(x + \Delta x)$
villkoret för s	$s \in (a, x)$	$c \in (x, x + \Delta x)$

Om man gör det då kan vi skriva satsen ovan som

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{1}{2} f''(c)\Delta x^2$$

där $c \in (x, x + \Delta x)$. Om det går att begränsa $f''(c)$ så att $|f''(c)| < K$ för $c \in (x, x + \Delta x)$ då kan man skriva ekvationen ovan på ett speciellt sätt

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + O(\Delta x^2)$$

Vi kommer att prata om den stora O notationen senare.

3.8 Relationen mellan den grundläggande differentialregeln och MVS

Nu när vi har bekantat oss med medelvärdesatsen, vi kan passa på att förbättra vår ljussabel teknik, och det känns bra att koppla medelvärdesatsen med den grundläggande differentialregeln $df = f'dx$.

Om vi betraktar medelvärdesatsen i formen

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(c)\Delta x$$

med $c \in (x, x + \Delta x)$ som vanligt, och skickar $\Delta x \to 0$, alltså vi använder $(Eq: dxDx)$ då får vi

$$df = f(x + dx) - f(x) = f'(x)dx$$

och allt faller på plats. Viktigaste steget är insyn till att $c \in (x, x + dx)$ borde ju vara samma som $c = x$ för $\lim_{\Delta x \to 0} (x, x + \Delta x) = (x, x)$. Nu kan man undra, vad intervallet $(1,1)$ är tex, men den borde motsvara en punkt. Alltså, här har vi ett exempel där jag väljer $dx = 0$ för jag sa ju implicit att $(x, x + dx) = (x, x)$. Visst, är det konstig! Den raka motsatsen är där jag behöll dx som multiplicerar f', alltså i $f(x)dx$. När skall man behålla $dx \neq 0$, när kan man anta $dx = 0$? Den eviga frågan alltså. För att förstå förklara det på ett rigoröst matematiskt sätt behöver vi prata om Taylor satsen och notationen som alla studenter starkt ogillar: $O(\Delta x)$, $O(\Delta x^2)$, osv.

3.9 Hur vi tolkar differentialer med flera variabler

Nu kommer vi till några lite mera komplicerat exemplen. Vad förställer alla uttryck under?

- Ex7: $d(fg) = ?$
- Ex8: $d\left(\frac{f}{g}\right) = ?$
- Ex9: $d(f^2 g^3) = ?$

Ja, med lite väl formulerad skepticism, ni kan ju fråga, ok, vad betyder uttrycket $d(\text{"smörja"})$ överhuvudtaget när vi har flera variabler under parentesen? Låt oss titta på ett uttryck som är strukturerat:

$$d(\spadesuit + \clubsuit) = ? \quad (*)$$

Det är det viktigaste med det hela: "att betyda". Vad detta betyder är att vi inte spelar ett kort spel ☺, men vi jobbar med två variabler ♠ och ♣. Vad är relationen mellan dessa två variabler? Det kan

man inte veta i förväg. Det är kontexten som dikterar tolkningen. Alltså, dessa två variabler kan vara oberoende, kan vara beroende på varandra, eller kan vara beroende på en tredje variabel x. Den rätta tolkningen beror på kontexten man jobbar i.

I envariabelanalys antar vi att bägge tvår variabler beror på x, och det är detta som definierar kontext när vi diskuterar sådana uttryck. Alltså vi antar att $\spadesuit = f(x)$ och $\clubsuit = g(x)$.

Vi behöver inte veta hur f och g ser ut. Man kan räkna ganska mycket utan att veta vad f och g är. Många studenter upplever detta frustrerande, så det är bra att vänja sig att tänka på det sättet.

I flervariabelanalys ni kommer att prata om samma när $\spadesuit$ och $\clubsuit$ beror på ett par av variabler (x_1, x_2) (2D) eller en triplett av variabler (x_1, x_2, x_3) (3D); så man ökar antal variabler på ett naturligt sätt, beroende på problemet man försöker lösa

- 1D: $\spadesuit = f(x_1)$ och $\clubsuit = g(x_1)$
- 2D: $\spadesuit = f(x_1, x_2)$ och $\clubsuit = g(x_1, x_2)$
- 3D: $\spadesuit = f(x_1, x_2, x_3)$ och $\clubsuit = g(x_1, x_2, x_3)$.

Så, tillbaka till Ex7-9 i envariabelanalys kontexten. Ex7 är i princip samma som $(*)$ fast istället av ”+” som har vi ”/” som operatorn. Man kan säga att f motsvarar $\spadesuit$ och g motsvarar $\clubsuit$. Det viktigaste dock är att vi antar att bägge f och g beror på en variabel x. Aha, och nu börjar allt hamna på plats. om vi ändrar variabeln från x till $x + dx$, då funktionen f ändras från $f(x)$ till $f(x + dx)$. På samma sätt funktionen g ändras från $g(x)$ till $g(x + dx)$. Ett ganska exakt sätt att skriva vad Ex7 föreställer är att ange

$$d(fg) = f(x + dx)g(x + dx) - f(x)g(x)$$

och om vi använder $f(x + dx) = f + df$ och $g(x + dx) = g + dg$ då får vi det i lite lättare notation

$$d(fg) = (f + df)(g + dg) - fg$$

På samma sätt kan vi skriva Ex8 som

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f(x + dx)}{g(x + dx)} - \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f + df}{g + dg} - \frac{f}{g}$$

och Ex9 som

$$d(f^2 g^3) = f(x + dx)^2 g(x + dx)^3 - f(x)^2 g(x)^3 = (f + df)^2 (g + dg)^3 - f^2 g^3$$

Innan vi slutför Ex7-9 behöver vi fundera en smula.

Tre styck funderare
(1) Varför är det ok att skriva så? $2dx + 5dx^2 + 7dx^3 = 2dx$
(2) Varför är det inte ok att skriva så? $2dx + 3dy = dx$
(3) Varför är det ok att skriva så? $2dx + 3dy + 5dxdy = 2dx + 3dy$

Ex7 kräver lite extra arbete:

$$d(fg) = (f + df) \cdot (g + dg) - fg =$$

$$= fg + f \cdot dg + df \cdot g + df \cdot dg - fg =$$

$$= f \cdot dg + df \cdot g + df \cdot dg = df \cdot g + f \cdot dg$$

Notera att termer i gult förkortar varandra, och i det sista steget antog jag att

$$df \cdot dg \ll f \cdot dg + g \cdot df$$

och det tar lite tid att man fattar varför det är så. I princip är alltid så att

$$d\blacksquare \cdot d\blacksquare \ll tal \cdot d\blacksquare$$

Inte så konstig[6], det går att få samma resultat med derivataregler

$$\frac{d(fg)}{dx} = \frac{df}{dx}g + f\frac{dg}{dx}$$

om man multiplicerar uttrycket ovan med dx

$$\frac{d(fg)}{dx}dx = dx\frac{df}{dx}g + f\frac{dg}{dx}dx$$

där termer markerade i gult tar bort varandra.

Ex8 är kanske svårast av alla

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f + df}{g + dg} - \frac{f}{g} = \frac{(f + df)g - (g + dg)f}{(g + dg)g} = \cdots = \frac{df \cdot g - f \cdot dg}{g^2}$$

Detta visas i två steg. Först $(g + dg)g = g^2$, och sen man måste använda att $dfdg \ll dfg - fdg$. Ex9 kan räknas så här

$$d(f^2g^3) = d(f^2)g^3 + f^2d(g^3)$$

där vi har använt

$$d(I \cdot II) = dI \cdot II + I \cdot dII$$

Med $d(f^2) = 2fdf$ och $d(g^3) = 3g^2dg$ så får man

$$d(f^2g^3) = 2fg^3df + 3f^2g^2dg \quad (\times)$$

Visst, man kan få ut samma resultat genom att använda algebraregler (binomialsatsen) och behålla bara första grads potenser i df och dg.

Hemläxa: Räka $(\times)$ med hjälp av binomialsatsen och anta att högre grads potenser i df och dg kan försummas.

3.10 Om vi behöver approximera med högre grads polynomer

Nyckelord:

[6]Varför säger jag "Inte så konstig"? Ju, för att det här är ett sätt att bevisa produktregel. Om det är sant att $d(fg) = df \cdot g + f \cdot dg$ då produktregel följer automatisk genom att dela med dx. Alltså, $d(fg) = df \cdot g + f \cdot dg \rightarrow (fg)' = f'g + fg'$.

- högre grads approximation
- Taylor satsen
- O() notationen

Linjär approximation fungerar inte alltid. Här är ett exempel. Anta att vi vill räkna $f(x) = \sin x$ i linjär approximation i punkten $f\left(\frac{\pi}{2} + 0.1\right)$ och vi vill använda $x = \frac{\pi}{2}$ som referenspunkt. Följer man receptet får vi

$$f\left(\frac{\pi}{2} + 0.1\right) \approx f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot 0.1 = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin'\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot 0.1$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + 0.1\right) \approx \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot 0.1$$

Men, problemet är att $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Så, vi kan inte göra bättre än punktapproximation i det här fallet

$$f\left(\frac{\pi}{2} + 0.1\right) \approx f\left(\frac{\pi}{2}\right) + 0 \cdot 0.1 = f\left(\frac{\pi}{2}\right) + 0 = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Hur gör vi här? Ju, som tur är, man kan försätta utvecklingen i högre grader av Δx. Det finns ett systematiskt sätt hur man kan approximera funktioner och receptet är beskriven i format av Taylor satsen. Det är svårt att tro att detta är en grej en ingenjör kan använda, och borde använda om det behövs. Ganska typisk att mest användbara grejer i matematiken kan kännas främmande och abstrakta. Kring formalia läs boken:

4.10 Taylor Polynomials > Theorem 12

Taylor's Theorem

If the $(n+1)$st-order derivative, $f^{(n+1)}(t)$, exists for all t in an interval containing a and x, and if $P_n(x)$ is the nth-order Taylor polynomial for f about a, that is,

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

then the error $E_n(x) = f(x) - P_n(x)$ in the approximation $f(x) \approx P_n(x)$ is given by

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

where s is some number between a and x. The resulting formula

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad \text{for some } s \text{ between } a \text{ and } x,$$

is called **Taylor's formula with Lagrange remainder**; the Lagrange remainder term is the explicit formula given above for $E_n(x)$.

Den är skrivet i rent allmän form och man kan tycka att den är abstrakt. Så, för att ni skall se lättare hur man kan använda den, vi kan översätta satsen till notationen vi har redan använt för den linjära approximationen, så det blir lättare att jämföra. Här är tabellen som kan hjälpa er översätta

objekt	formen i boken	differentialer
referenspunkt	a	x
f i referenspunkt	$f(a)$	$f_{\text{ref}} = f(x)$
närliggandepunkt	x	$x + \Delta x$
f i närliggandepunkt	$f(x)$	$f_{\text{nytt}} = f(x + \Delta x)$

I notationen vi är vana vid satsen säger att

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{1}{2!}f''(x)\Delta x^2 + \frac{1}{3!}f'''(c)\Delta x^3$$

och den sista termen brukar vi skriva så här

$$\frac{1}{3!}f'''(c)\Delta x^3 = O(\Delta x^3)$$

där $O(\Delta x^3)$ är en straks klistermärke som markerar att uttrycket till den vänstra sidan av ekvationen beter sig som

$$\frac{1}{3!}f'''(c)\Delta x^3 \sim K\Delta x^3$$

där K är en konstant. Med den notationen man kan skriva om utvecklingen så här

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{1}{2!}f''(x)\Delta x^2 + O(\Delta x^3)$$

Med att skriva $O(\Delta x^3)$ vi vill bara betona vilken typ av term vi nonchalerar. Det är bara extra information till läsaren som tittar på vår uträkning, eller oftare information till oss själva när vi utvecklar en matematisk modell.

Tillbaka till det problematiska exemplet. Istället för linjär approximation vi kan använda den ”kvadratiska” approximationen

$$f\left(\frac{\pi}{2} + 0.1\right) \approx f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot 0.1 + \frac{1}{2}f''\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot 0.1^2 \pm K\, 0.1^3 \quad Eq{:}KvAppNum$$

så vi kan tolka uttrycket som

$$f\left(\frac{\pi}{2} + 0.1\right) \sim 1 + 0.1 + 0.01 \pm 0.001 \quad Eq{:}KvAppPot10$$

vilket ger oss lite känsla om hur de numeriska värdena förhåller sig till varandra. Symbolen ”=” ni fattar, symbolen ”≈ ” fattar ni med, men jag är inte säker att ni fattar vad menas med ”∼”. Symbolen ”∼” uttrycker helt enkelt att vi är bara intresserade av potenser av 10, mer eller mindre. Så vi kan skriva någonting sådant $0.2 \sim 0.3 \sim 0.09$. Vi definitivt kan inte skriva $1 \sim 0.001$. Det är fel att skriva så.

> Hemläxa: Utför den kvadratiska approximationen i ekvationen $Eq{:}KvAppNum$. Använd räknaren för att hur dem numeriska värden förhåller sig till varandra. Jämför med det vi har spått i ekvationen $Eq{:}KvAppPot10$.

3.11 O() notationen

”Den stora O” notationen brukar den kallas för. Den är ett viktigt verktyg som vi kan använda att beskriva approximationer. Det är bra att titta på ett exempel. Betrakta uttrycket $y = 2x + 7\Delta x^2 +$

♣. Anta att vi vet att ♣ $\approx K\Delta x^5$ och anta att vi leker med idén att kanske ♣ kan strykas bort från uttrycket. Istället att skriva, ganska brutalt $y \approx 2x + 7\Delta x^2$ försöker vi ge lite mera information igenom att markera ♣ $= O(\Delta x^5)$ och skriva istället $y = 2x + 7\Delta x^2 + O(\Delta x^5)$ och det är ganska behaglig för ögat, för vi kan se ganska fort hur uttrycket beter sig.

Notera hur vi bollar mellan olika relations tecken, och då menar jag "=", "approx", och "~". Med $O(\quad)$ notationen använder vi "=" tecknet

$$y = \text{någonting} + O(\quad)$$

som skiljer sig från när $O(\quad)$ inte finns. Då skriver vi

$$y \approx \text{någonting}$$

om vi vill veta vad pågår numerisk, alltså riktiga siffror, eller vi skriver

$$y \sim \text{någonting}$$

om vi är bara intresserade av potenser av 10. Trotts att vi gör en approximation med $O(\quad)$ notationen kan vi skriva "=" tecken, för vi har lite extra information angående hur bra approximationen är!

Det största bidraget till y sannolikt kommer från den första termen $2x$. Den näst största bidraget kommer från den andra termen $7\Delta x^2$. Den minsta bidraget kommer från det sista termen $O(\Delta x^5)$. Alltså när jag ser någonting sådant tänker jag, aha, det är någonting som liknar $y \sim 1 + 0.01 + 0.00001$. Visst om ni som är observanta kunde tycka att det borde vara $y \sim 2 + 0.07 + K \cdot 0.00001$, och det är också ok. Notera att jag antar varje gång jag tänker om sådant att $x \sim 1$. Vad är viktig att det finns stora skillnader i potenser av 10 i uttrycket och vi vet att mer eller mindre det blir alltid så att $\Delta x \ll x$ för det är ju vad Δ betyder, inte sant? En annan person kunde tycka att 0.1 var väl lite för stort tal att representera Δx, att kanske kan kunde ha tagit $\Delta x = 0.001$. Då, jädra, skillnader i potenser av 10 blir ännu starkare: $y \sim 1 + 0.000001 + 0.000000000000001$. Vi ser att det blir mindre viktigare att skriva $y \sim 2 + 0.000007 + K \cdot 0.000000000000001$ för hur man än vrider på uttrycket så allt som följer efter $2x$ är avsevärt mycket mindre än själva $2x$, och allt som följer $2x + 7\Delta x^2$ är avsevärt mycket mindre än $2x + 7\Delta x^2$.

Varför skall en IT ingenjör vet om den stora O notationen? Ju, för att kunna välja den rätta approximationen!

Här har ni en funderare. Anta att du skriver en kod för en kontroll komponent som arbetar kring $x = 0$; x är en variabel som "avläses" av en sensor som mäter acceleration. Också anta att du skriver i kontext av en plattform som stödjer "callback" alltså en form av återuppringning mellan olika delar av koden. Koden som styr hela enheten ser ut så här:

kod som kontrollerar hela prylen har en inbyggd "loop"

```
void main (args){
   boolean device_on = args[1]
   MotorController mc = args[2]
   if(!device_on) return
   // nu vet vi att prylen jobbar
```

```
   // starta loopen och kör bara
   while(true)do
   {
      // fråga sensorn vad x är
      x = sensor_query()
      //
      // justera motor styrka
      ms = motor_power(x)
      if (ms=null) {
         // det är ett problem med sensorn
         broadcast_message(”possible sensor malfunction”)
         // lugna ner prylen så att vi inte gör
         // någonting dumt
         x = 0
      }
      // tillämpa motor styrka
      mc.ApplyStrength(ms)
   }
}
```

En viktig del av koden är funktionen som kontrollerar motorn beroende på vad output av sensorn är. Koden som räknar styrkan av motor ser ut så här.

kod som kontrollerar en komponent; x är input från sensorn, output $f(x)$ styr styrka av en motor

```
real function motor_power(real x)
   // output måste skickas till koden
   // som har anropat den här funktionen
   //
   // först vi kontrollerar att x är ok
   if(abs(x)>0.1) {
      throw exception(“motor_power-W: warning
                        sensor input out of range”)
      return null
   }
   // nu vet vi att x är ok, bedöm den rätta motor styrka
   output = . . . x . . .  // här ett uttryck som beror på x
   return output
end real function
```

Som en duktig ingenjör gör du litteraturundersökning och hittar flera styck approximationer som du kan välja emellan.

(a) $f(x) = \frac{1}{|x|+\frac{1}{10}} + O(x)$

(b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + x + O(x^2)$

(c) $f(x) = xe^{-|x|} + O\left(\frac{1}{x}\right)$

(d) $f(x) = x^2 + \sqrt{|x|} + O(x-5)$

Ibland, men inte alltid, personer som publicerar sådana resultat kan vara extra tydliga och skriva

(a) $f(x) = \frac{1}{|x|+\frac{1}{10}} + O(x);\ \ x \to 0$

(b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + x + O(x^2);\ \ x \to 0$

(c) $f(x) = xe^{-|x|} + O\left(\frac{1}{x}\right);\ \ x \to \infty$

(d) $f(x) = x^2 + \sqrt{|x|} + O(x-5);\ \ x \to 5$

men kan häda att sådan information saknas. Hur som helst, fundera noggrant vilken approximation är bäst. Vilken approximation borde du välja att implementera i din kod? Att kunna göra en korrekt avvägning mellan alla alternativ ovan är ett viktigt lärande mål i kursen!

3.12 Hur jobbar man med differentialkalkyl rent praktisk?

Konceptuellt: I princip att arbeta med differentialkalkyl betyder att vi utför Taylorutveckling med en extremt litet Δx. Den är såååååååååååå liten att vi kan försumma alla termer av grad högre än 1. Vi använder Taylor satsen med referenspunkten lika med x och grannpunkten lika med $x + \Delta x$:

$$f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{1}{2} f''(c)\Delta x^2$$

med $c \in (x, x+\Delta x)$. I det sista steget antar vi att $\Delta x \to 0$, alltså byter vi Δx mot dx och Taylor utvecklingen bli

$$f(x+dx) = f(x) + f'(x)dx + \frac{1}{2} f''(c)dx^2$$

med $c \in (x, x+dx)$. Med dx infinitesimal kan vi vara ganska säkra att c ligger väldigt nära x och f'' borde vara begränsat, alltså ett tal, och då vet vi att vi kan skriva

$$f(x+dx) = f(x) + f'(x)dx + O(dx^2)$$

eller

$$f(x+dx) = f(x) + f'(x)dx + f''(x)dx^2 + O(dx^3)$$

eller

$$f(x+dx) = f(x) + f'(x)dx + f''(x)dx^2 + f'''(x)dx^3 + O(dx^4)$$

och så vidare.

Vilken grad skall vi välja? Vi väljer den som passar i kontexten, oftast det räcker med grad 1.

I praktiken: Vad händer i praktiken är att vi *arbetar med differentialkalkyl* igenom att följa en två stegs process.

Steg 1: Först vi antar att vi har med dx att göra och vi vet hur vi räknar. Det viktigaste är att vi vet att vilket om ett uttryck som kan beskrivas som $f(x+dx)$ kan reduceras till $f(x+dx) = a(x) + b(x)dx$ där vi behåller bara potenserna dx^0 och dx^1 och förkastar alla potenser av typ dx^2, dx^3, osv. Vi vet exakt vad $a(x)$ och $b(x)$ är. Som sagt, ofta är det så att vi är nöjda med Taylor utveckling till grad 1 i variabel dx: $f(x) + f'(x)dx + O(dx^2) = f(x) + f'(x)dx$.

Steg 2: Sedan, när allt algebra är gjort, byter vi tillbaka till Δx och räknar numerisk.

Det finns några naturliga frågor som man kan ställa här.

Fråga 1: Varför behöver vi två olika saker, en Δx som är liten dock är fast och en dx som går mot noll?

Låt oss referera till den som minskar som ”springaren” (den som minskar ju hela tiden). Vi använder springaren för att räkna på ett enklare sätt, att utföra enklare algebra. Senare när vi räknar numerisk i applikationer då går vi tillbaka till den som står stilla.

Fråga 2: Varför kan vi inte använda den som står stilla direkt?

Vi kan väl det, men det kräver extra komplicerad algebra för man behöver jobba med Taylor satsen och fundera på fel skattning, alltså den stora O termen som ruvar i slutet av Taylorutveckling. I grund och botten om vi jobbar med ”springaren” då har vi ett enda regeln som vi behöver använda $f(x + dx) = f(x) + f'(x)dx$. Men när vi väl går tillbaka till den stora Δx då kan vi inte använda ”=” tecken, då skriver vi $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$. För om vi insisterar att använda ”=” tecken då måste man skriva på ett speciellt sätt: $f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + O(\Delta x^2)$. I princip försöker vi göra matematiken på ett mindre formellt sätt.

3.13 Procentuellökning

En bra teknik att kunna som är relaterad till den linjära approximationen är metoden man kan använda för att göra någonting som liknar känslighetsanalys, alltså att säga hur mycket ändringar i en variabel, x, påverkar en annan variabel Q som beror på x.

Målet är att hitta relationen av typ

$$\frac{\Delta Q}{Q} \approx \sigma \frac{\Delta x}{x}$$

alltså att hitta vad σ är. Det är möjligt att σ beror på x. Notera att vi fiskar efter procentuella ändringar. Tex om x ökar med 15% då $\frac{\Delta x}{x} = 0.15$, och vi vill veta vad $\frac{\Delta Q}{Q}$ är.

Exempel 1: Ett typiskt problem kunde vara att räkna hur mycket ändras volymen av en boll om vi ökar radien med 1% (se 4.9.EX2)[7].

Exempel 2: Man kan jämföra med hur mycket ytan av en kvadrat skulle öka om man stretchar ut den så att diametern ökar med 1% (se 2.7.EX3), eller blir den skillnad om en sida av rektangeln ökar med 1%. Alla dessa problem delar ett samma tema: om vi stretchar ut ett objekt, hur mycket, i procent, längden L, ytan A, eller volymen V kommer att ändras. Det visar sig att

$$\frac{\Delta L}{L} = 1 \cdot \frac{\Delta x}{x}$$

$$\frac{\Delta A}{A} = 2 \cdot \frac{\Delta x}{x}$$

$$\frac{\Delta V}{V} = 3 \cdot \frac{\Delta x}{x}$$

Det är en bra övning att välja några enkla geometriska former och visa att tre ekvationer ovan stämmer.

[7] Notera att det finns ett fel i ADAMS just i det här problemet, L är fel använt; det står TAS0 = TAS1 i princip i ekvationen med $L(r + \Delta r)$. Ser ni hur man skulle rätta ADAMS?

Exempel 3 (2.7.EX3)**:** *Referensen:* Vi betraktar problemet när sidan av rektangeln är a, och ytan $A = a^2$. *Grannpunkten:* Nu betraktar vi problemet när a ändras till $a_{nytt} = a + \Delta a$. Vi räknar så här:

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{A(a + \Delta a) - A(a)}{\mathrm{A}}$$

Nu är frågan hur vi räknar $A(a + \Delta a) - A(a)$ vidare. Ett klumpigt sätt är att använda algebra och skriva

$$A(a + \Delta a) - A(a) = (a + \Delta a)^2 - a^2 = a^2 + 2a\Delta a + \Delta a^2 - a^2 = 2a\Delta a + \Delta a^2$$

Visst, det går för att funktionen är ganska enkel. Vad gör vi annars, om vi måste jobba med en funktion som är komplicerad? Det finns ett annat sätt. Vi använder differentialkalkyl. Steg 1 av differentialkalkyl är byta $\Delta x \to dx$. Då vet vi att

$$A(a + da) - A(a) = d\big(A(a)\big) = A'(a) \cdot da = 2a \cdot da$$

Som sagt, det var Steg 1 av differentialkalkyl. Steg 2 är att byta tillbaka $dx \to \Delta x$,

$$A(a + da) - A(a) \approx 2a\Delta a$$

men nu är vi försiktiga att använda " $\approx$ " tecken för vi vet att ekvationen är inte exakt. Hur som helst, med hjälp av ekvationen ovan vi kan skriva

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{A(a + \Delta a) - A(a)}{\mathrm{A}} \approx \frac{2a\Delta a}{A} = \frac{2a\Delta a}{a^2} = 2\frac{\Delta a}{a}$$

Vi ser hur faktorn 2 dyker upp, den kommer från potensen 2 i $A(a) = a^2$. Alltså vi kan skriva

$$\frac{\Delta A}{A} \approx 2\frac{\Delta a}{a}$$

och nu ser vi att procentuell ändring i ytan alltid är två gånger större än procentuell ändring i längden av kvadraten.

Exempel 4: Det intressanta är att vi kommer att ha samma resultat om vi ha en form med ytan som definieras av en längd och den kan vara av en frivillig form. Låt oss ta kvadraten igen men istället att skala upp sidan vi förlänger diagonalen en smula. Om vi jobbar med diagonalen av kvadraten, $w = \sqrt{2}a$, då ytan av kvadraten kan skrivas som $A = a^2 = \left(\frac{w}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{w^2}{2}$. Liknande uträkning ger

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{A(w + \Delta w) - A(w)}{\mathrm{A}} \approx \frac{A'(w)\Delta w}{A} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}2w\Delta w}{\frac{1}{\sqrt{2}}w^2} = 2\frac{\Delta w}{w}$$

och vi ser att faktorn $\frac{1}{\sqrt{2}}$ förkortas. Igen, det är bara 2:an som är kvar. Om man har objekt med ytan som definieras av en enda längd, som $A = kl^2$, då vet vi att konstanten k kommer att försvinna och vi kan skriva på stubinen att

$$\frac{\Delta A}{A} \approx 2\frac{\Delta l}{l}$$

Den procentuella ökningen i ytan beror inte alls på k!

Exempel 5: Gör samma uträkning som ovan (exempel 4) fast nu för volymen som definieras av en enda längd l, som $V = kl^3$. Som svar du borde få

$$\frac{\Delta V}{V} \approx 3\frac{\Delta l}{l}$$

Exempel 6: Du anställs av en arkitekt som bygger en biograf som har formen av en rektangel med sidorna a och b. Du vet inte a och b men du vet att enligt ursprungliga ritningar biografen var designad för 112 säten. I en ganska sent e-mail, arkitekten frågar dig hur mycket extra säten man kommer att få om man förlänger varje sida med 3% av den ursprungliga längden. Behöver du ringa tillbaka och fråga vad a och b är? Kan du skatta antal extra säten utan att veta vad a och b är? Ännu bättre fråga: beror procentuellt ökning i antal säten på a och b?

3.14 Att derivera uttryck som inte är helt specificerade

Nyckelord:
- allmän implicit derivata
- derivata av inversfunktion
- logaritmisk derivata

Implicit derivering är en av viktigaste kunskaper man kan sträva efter. För att kunna göra det bra är det viktig att veta hur man deriverar uttryck som inte är fullt specificerade. Jag har märkt att det största problemet för studenter är att derivera ett uttryck där alla termer är inte kända. Syftet med det här kapitlet är att förklara hur man gör. Om ni kan det här, då är det ganska enkelt att göra implicit derivering.

Så målet är att lära sig kunna derivera uttryck som är inte helt explicita i x.

Som ett exempel, betrakta

$$y = \sin x + a^2 + a\ln x \quad Eq{:}\,yxa1$$

och vi antar att alla symboler föreställer funktioner av en variabel x:

$$y(x) = \sin x + a(x)^2 + a(x)\ln x \quad Eq{:}\,yxa2$$

Notera att vi har tre typer av termer. Det första beror bara på x, den andra beror indirekt på x igenom a, och den andra beror bägge på a (och indirekt över x) och x. Målet är att räkna derivatan av y. Jag har märkt att många studenter har problem med detta. Märklig nog, hade det stått så här,

$$y(x) = \sin x + (x^2+1)^2 + (x^2+1)\ln x \quad Eq{:}\,yx$$

då de flesta studenter skulle kunna räkna derivata utan problem. Det enda som hände är att jag antog att $a(x) = x^2 + 1$. Alltså ekvationer (Eq:yx) och (Eq:yax) är identiska strukturalt sett. Samma derivata operationer som man använder för att räkna y(x) i ekvationen (Eq:yx) använder man för att räkna derivatan av y som stor i (Eq:yax). Jag har funderat ganska mycket varför är det så att studenter brukar inte ha problem med att derivera Eq:yx men har problem med Eq:ya.

Det bästa sättet är att försöka göra det här stegvist och parallellt. Först, tillämpar vi summar regel och produktregel:

$$y'(x) = (\sin x)' + ((x^2+1)^2)' + (x^2+1)'\ln x + (x^2+1)(\ln x)'$$

$$y' = (\sin x)' + (a^2)' + a'\ln x + a(\ln x)'$$

Nu tillämpar vi derivatatabeller för $\sin x$ och $\ln x$, och kedjeregel (som går att tillämpa bara i den första raden, i den andra raden det beror på vad a är)

$$y'(x) = \cos x + 2(x^2+1)(x^2+1)' + (x^2+1)' \ln x + (x^2+1)\frac{1}{x}$$

$$y'(x) = \cos x + 2aa' + a' \ln x + a\frac{1}{x}$$

och i sista steget räknar vi $(x^2+1)' = 2x$ i den första ekvationen och vi lämnar den andra som den är, och använder färger att kunna jämföra de lättare:

$$y'(x) = \cos x + 2(x^2+1)2x + 2x \ln x + (x^2+1)\frac{1}{x} \quad Eq: dyx$$

$$y' = \cos x + 2aa' + a' \ln x + a\frac{1}{x} \quad Eq: dyxa1$$

Det kanske blir mindre abstrakt om man jämför dessa två uttryck. Vi vet att dem måste vara densamma på grund att $a = x^2 + 1$ och $a' = (x^2+1)' = 2x$. Kolla själva att det stämmer.

Det intressanta nu att inse är att det andra uttrycket kan vara sant utan att vi behöver veta vad a är för någonting! Alla operationer vi gjorde med den andra ekvationen vi kunde ha gjort oavsett vad a är, inte sant? Då, drar vi slutsatsen att $y = \sin x + a^2 + a \ln x$ från ekvation (Eq:yxa1) går att derivera utan att man vet vad a är. Den kunde ha varit så att $a = x^2 + 1$ med det behöver inte vara så. Alltså oavsett vad a är vet vi att det måste vara så att $y' = \cos x + 2aa' + a' \ln x + a\frac{1}{x}$ som vi fick i (Eq:dyxa1). Varför behöver man sådant? Ibland vill vi räkna med sådana uttryck där a är inte fullt specificerat och det blir klart vad a är bara efteråt att vi har räknat derivata. Hur som helst…

> Det är så vi når målet, att kunna derivera uttryck som inte är fullt specificerade:
> **Steg 1:** Visualisera att variabler som inte är specificerade är någonting ni kan derivera;
> **Steg 2:** Utför derivatan och vara petiga att ni skriver alla mellan steg (ange tydlig i uträkningen, ”nu använder jag produktregel” eller ”nu använder jag kedjeregel”);
> **Steg 3:** Tänk tillbaka igenom processen en gång till och byt tillbaka till de variabler som är inte definierade.

Några bra exempel att träna på. Räkna så långt det går derivatan av följande uttryck:

- $(y^2)' = ?$
- $(y^7)' = ?$
- $(xy^3)' = ?$

3.15 Implicit derivering

Om man har läst noggrant igenom hur man deriverar uttryck som inte är fullt specificerade då är det ganska enkelt att förstå implicit derivering. Vi visar hur metoden fungerar med några exempel.

Exempel 1:

Implicit funktion: Ekvationen

$$x = y^2 + 2y + 1 \quad Eq: yx1$$

definierar en implicit funktion. Vi antar att y beror på x och att x är variabel som ”styr” allt, och y bara ”svarar” på ändringar i x: $y = f(x)$. Målet är att räkna $y' = \frac{dy}{dx}$. Om man väljer ett x då kan

man lösa ekvationen och få ut y. Alltså vi har en procedur att för angiven x bestämma vad den motsvarande y är. Som ett exempel, vi kan se hur det bli när man använder Mathematica att lösa ekvationen. Anta att $x = 2$. Då ekvationen bli $2 = y^2 + 2y + 1$. Vad har vi för y? Efter att jag har frågat Mathematica att leta efter lösningen kring $y = 1$, Mathematica säger så här:

```
In[3]:= FindRoot[2 == y^2 + 2 y + 1, {y, 1}]

Out[3]= {y → 0.414214}
```

Detta betyder att $f(2) = 0.414214$. Samma sak fast för $x = 2.1$. Då ekvationen bli $2.1 = y^2 + 2y + 1$. Vad har vi för y? Igen, jag ber Mathematica leta efter lösningen kring $y = 1$. Den svarar så här:

```
In[4]:= FindRoot[2.1 == y^2 + 2 y + 1, {y, 1}]

Out[4]= {y → 0.449138}
```

Detta betyder att $f(2.1) = 0.449138$. Vi kan också försöka skatta derivata av y som funktion av x i punkten $x = 2$ som

$$y' \equiv \frac{df}{dx} \approx \frac{f(2+0.1) - f(2)}{0.1} = \frac{0.449138 - 0.414214}{0.1} = \frac{0.034924}{0.1} = 0.34924$$

Explicit lösning (funktion): Men, just för det här problemet kan vi också jobba analytisk. Ni vet ju från gymnasiet hur man hittar lösningar till en kvadratisk ekvation. Ni också vet att en kvadratisk ekvation har, i princip, två lösningar, så inte så konstig att ekvationen ovan definierar faktisk två funktioner. Vi kan lösa ekvationen explicit efter att vi inser att ekvationen kan skrivas om som $x = (y+1)^2$ och drar man roten av den vänstra och den högra sidan av ekvationen får vi $\pm\sqrt{x} = y + 1$ alltså $y = -1 \pm \sqrt{x}$. Så vi kan välja mellan två lösningar

$$y = \begin{cases} -1 + \sqrt{x} \\ -1 - \sqrt{x} \end{cases}$$

Ni ser ett intressant exempel här: hur vet vi vilken gren har Mathematica valt att jobba med. Varje numerisk procedur för att lösa ekvationer jobbar med en gissning. Jag ”beordrade” Mathematica at börja leta kring $x \approx 1$ och den har precis gjort så. Den har hittat den positiva roten $-1 + \sqrt{2}$.

Explicit derivata: Det är ganska enkelt att räkna derivatan explicit som

$$y' = \left(-1 \pm \sqrt{x}\right)' = 0 \pm \frac{1}{2\sqrt{x}} = \pm\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Vi kan jämföra det exakta resultatet med den numeriska skattningen vi har gjort tidigare: i $x = 2$ är derivatar exakt lika med $y' = \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0.353553$ och vi har räknat rent numeriskt att $y' = 0.34924$. Just för den här ekvationen hade vi tur, för vi kunde hitta y som funktion av x. Vad gör man när det inte går. Hur huttar man derivatan då? Låt oss visa hur man gör.

Implicit derivering: Vi låtsas nu vi att vi inte vet hur y ser ut som funktion av x. Det enda vi behöver göra är att räkna derivator av den högra och den vänstra sidan med regler vi har diskuterat tidigare. Försök visualisera, som en minnesteknik, att vi räknar

$$(Eq{:}\,yx1)' \rightarrow (VS = HS)' \rightarrow VS' = HS'$$

Tillämpar vi receptet ovan får vi

$$x' = (y^2 + 2y + 1)'$$

$$1 = (y^2)' + (2y)' + (1)'$$

$$1 = 2yy' + 2y' + 0$$

När vi har gjort alla steg ovan, då kan vi tolka den sista ekvationen som en ekvation med en variabel som behöver lösas för y'. Efter lite algebra

$$1 = (2y + 2)y' \rightarrow 1 = 2(y + 1)y'$$

och vi får

$$y' = \frac{1}{2(1 + y)}$$

Wow! Vi har räknat derivata utan att vi behövde lösa ekvationen. Det enda problemet är att vi har utryckt derivata som en funktion y och inte x. Men det är ok, för vi kan anta att i praktiska tillämpningar vi kommer alltid att veta vad y är om någon ger oss x. Varför? Just i det här fallet har vi en matematisk formel som vi kan använda för vi vet att $y = -1 \pm \sqrt{x}$. Om vi använder den i ekvationen ovan får vi

$$y' = \frac{1}{2(1 - 1 \pm \sqrt{x})} = \pm\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

exakt densamma som vi har hittat tidigare.

Exempel 2: Nu tittar vi på en ekvation som går inte att lösa analytisk. Vad skulle vi ha gjort om det hade stått så här?

$$x = y^7 + 2y^3 + 1 \; Eq{:}\,yx2$$

Som vanligt, det är då automatiskt att man betraktar x som en funktion av y, dvs att man ska derivera y med avseende på x, nämligen dy/dx. Alltså, här igen vi antar att x ”styr” och y ”anpassar” sig: $y = f(x)$. Målet är att räkna $f'(x)$ trotts att vi vet inte hur $f(x)$ ser ut.

För ekvationen ovan vi har ingen explicit formel vi kan använda för att uttrycka y som en funktion av x. Men, vi kan räkna derivatan av y över x oavsett! Vi börjar med $x = y^7 + 2y^3 + 1$ och deriverar den högra och vänstra sidan, och ställer dem mot varandra

$$(x)' = (y^7 + 2y^3 + 1)'$$

$$1 = 7 \cdot y^6 y' + 2 \cdot 3y^2 y' + 0$$

$$1 = (7y^6 + 6y^2)y'$$

som kan frias för derivatan vi letar efter

$$y' = \frac{1}{7y^6 + 6y^2}$$

Igen, vi får derivata som en funktion av y med det är ok, för vi kommer att veta y så fort någon säger vad x skall vara. Som ett exempel, låt oss anta att vi vill räkna derivatan i x=2. För att använda formel

ovan, måste vi veta vad y är. Vi frågar Mathematica att ge oss lösningen till ekvationen $2 = y^7 + 2y^3 + 1$ kring $y = 1$ och Mathematica svarar att det finns en lösning:

```
In[17]:= y1 = FindRoot[2 == y^7 + 2 y^3 + 1, {y, 1}]

Out[17]= {y → 0.754878}
```

Då nöjda och glada kan vi räkna derivatan som

$$f'(2) = y'|_{x=2} = \frac{1}{7y^6 + 6y^2}|_{y=0.754878} = 0.2121$$

För det sista steget använde jag Mathematica:

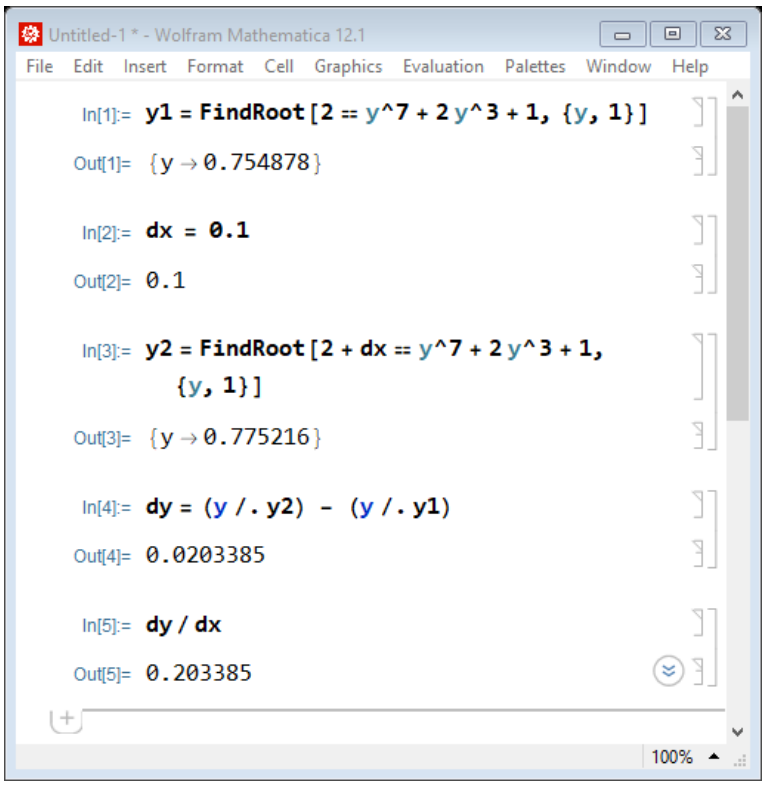
```
In[19]:= 1 / (7 y^6 + 6 y^2) /. y1

Out[19]= 0.21212
```

En cool grej är att försöka skatta derivatan numerisk. Vi använder Mathematica att göra jobbet. Vi ber Mathematica att räkna

$$f'(2) \approx \frac{f(2+0.1) - f(2)}{0.1}$$

och den svarar



Den numeriska skattningen av derivatan är

$$f'(2) \approx \frac{f(2+0.1) - f(2)}{0.1} = 0.2034$$

alltså hyfsat nära det exakta talet som vi fick fram med implicit derivering.

Exempel 3: Det kan hända att den slutliga derivatan kommer att bero bägge på x och y, det är ingenting konstig, bara naturlig. Om vi börjar från

$$x^2 = y^7 + 2xy^3 + 1$$

får vi de här stegen

$$(x^2)' = (y^7)' + 2x'y^3 + 2x(y^3)' + 1'$$

$$2x = 7y^6y' + 2 \cdot 1 \cdot y^3 + 2 \cdot x \cdot 3y^2y' + 0$$

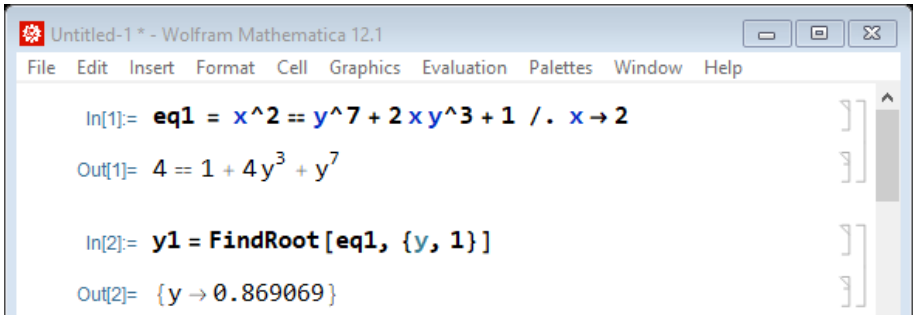
$$2x - 2y^3 = (7y^6 + 2 \cdot x \cdot 3y^2)y'$$

och den sista ekvationen ovan kan frias för derivatan vi letar efter

$$y' = \frac{2(x - y^3)}{7y^6 + 6xy^2}$$

Vist, det här uttrycket är extremt blandat i x och y men det spelar ingen roll, för vi kommer att veta vad de är.

Anta att vi vill räkna derivatan i $x = 2$. För att använda resultatet av implicit derivering ovan måste vi veta bägge x och y. Vi vet x men vi vet in y. Ja, här hugger in det numeriska in. Det enda sättet ibland är att räkna numerisk, och nu måste vi göra det. Som vanligt ber jag Mathematica göra jobbet åt oss.



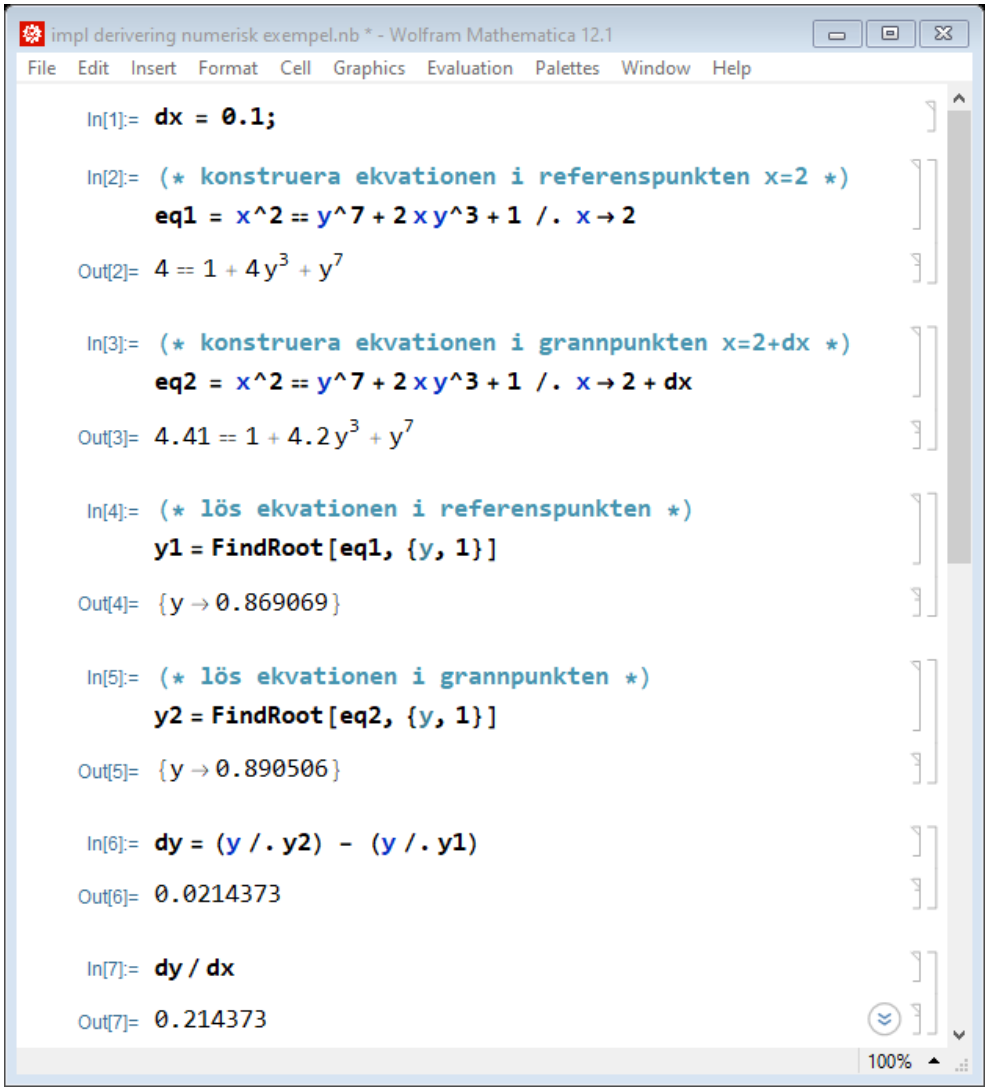
Derivatan kan räknas som

$$f'(2) = y'|_{x=2,y=0.869069} = \frac{2(x - y^3)}{7y^6 + 6xy^2}|_{x=2,y=0.869069} = 0.222465$$

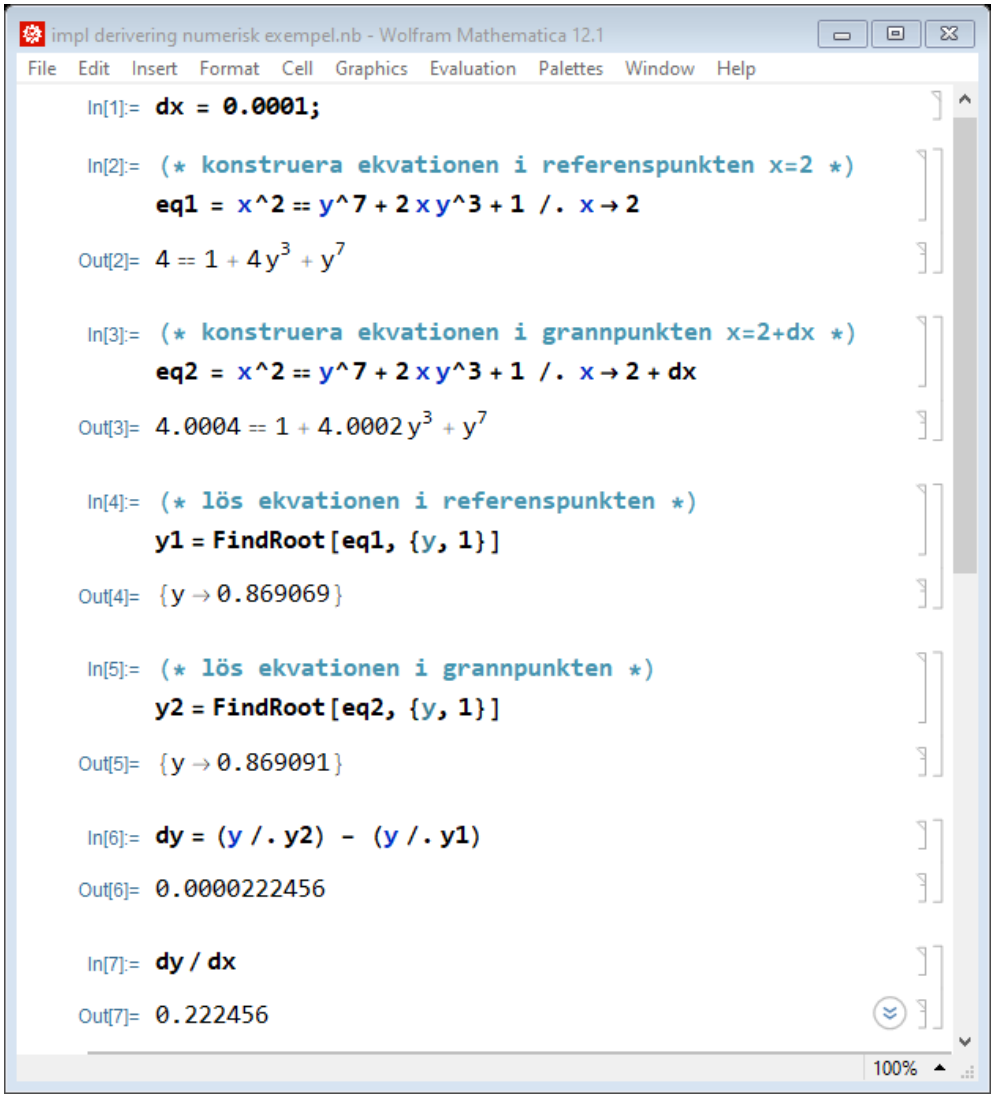
och jag har använt Mathematica för det

```
In[9]:= 2 (x - y^3) / (7 y^6 + 6 x y^2) /. y1 /. x → 2
Out[9]= 0.222465
```

Vi kan skatta igen, för skojs skull, derivatan numerisk, och vi hamnar ganska när det exakta resultatet men inte så nära som för andra exempel.



Visst om vi tar lite mindre dx då borde vi få bättre resultat. Visst, med en ganska överdrivet liten $\Delta x = 0.0001$ det blir mycket bättre:



Exempel 4: Om vi betraktar ekvationen $x^2 + y^2 = 1$ då har vi ett ganska känt exempel där alla lösningar till ekvationen ligger på en enhets cirkel. När man räknar implicit derivata i en punkt (x,y) man räknar faktisk lutningen på tangenten i denna punkt. Implicit derivering av den högra och den vänstra leden ger $2x + 2yy' = 0$ som ger $y' = -\frac{x}{y}$. Som en hemövning ni kan testa att allt stämmer när man räknar med den explicita formen $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$. Testa med bägge två tecken som behövs för att beskriva den översta och den understa bågar.

Några exempel att träna på följer. Räkna med implicit derivering derivator av funktioner som definieras med och försök omvandla (det går i alla exempel) så att derivatan skrivs som funktion av bara x:

- $y^2 = x$; kommentar[8]
- $\sin y = x$; kommentar[9]
- $\tan y = x$; kommentar[10]
- $\sinh y = x$; kommentar[11]

[8] när ni är färdiga med den här som kommer ni att visa vad derivatan av $y = \sqrt{x}$ är
[9] ni kommer att visa vad derivatan av $y = \arcsin x$ är
[10] ni kommer att visa vad derivatan av $y = \arctan x$ är
[11] ni kommer att visa vad derivatan av $y = \operatorname{arcsinh} x$ är

- $y^2 = x^3$; kommentar[12]
- $y^n = x^m$ där n och m är hela tal; kommentar[13]

Den slutliga utmaningen är ett problem från den skriftliga tentamen:

7. Beräkna derivatan $\frac{dy}{dx}$ i punkten $x = 1$ och $y = 1$. Funktionen definieras som nedan. Använd implicit derivering.

$$yx^7 = x + 6x \ln y$$

Ett bra problem som kräver kunskaper i implicit derivering och förståelse av differentialer är följande problem (TODO: gräv fram om tiden tillåter det problemet från gamla tentor, med kombination av Newton Raphson och implicit derivering).

3.16 Approximation i oändligheten: tillämpningar till snedasymptot

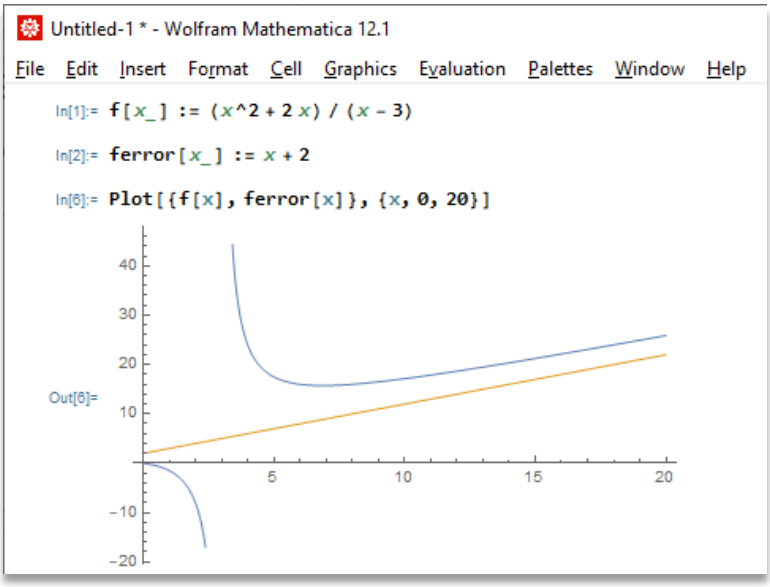
Nu kommer ett exempel som visar hur man kan använda den stora O notationen. Ett typisk fel studenter gör ner de letar efter sned asymptot är att räkna så här. Anta att problemet är att hitta sned asymptot till en funktion som är definierad som

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x - 3}$$

Ibland studenter gör följande felaktig uträkning:

$$\frac{x^2 + 2x}{x - 3} \approx \frac{x^2 + 2x}{x} = x + 2, \quad x \to \infty$$

och hävdar att den sneda asymptoten är $y = x + 2$. Men, det är inte sant, som ni kan se från följande Mathematica notebook bilden. Det finns en konstant skillnaden mellan funktionen och den sneda asymptoten. Det verkar som att $\lim_{x\to\infty}[f(x) - (x + 2)] \neq 0$ fast vi vet att det borde vara så att gränsvärdet är noll.



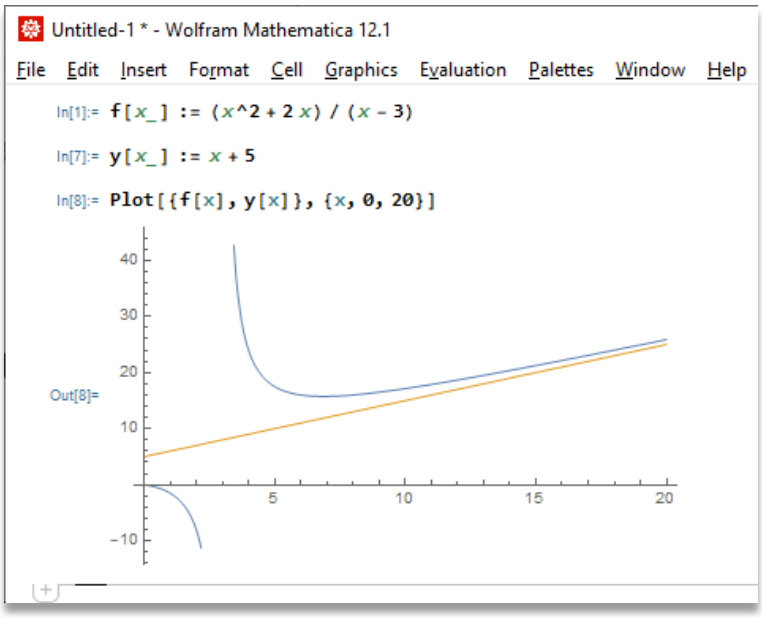
[12] ni kommer att visa vad derivatan av $y = x^{\frac{3}{2}}$ är

[13] ni kommer att visa vad derivatan av $y = x^{\frac{m}{n}}$ är

Problemet är att vi inte kan tappa 3:an i nämnaren. Den lämnar ett bidrag. Varför är det så? Kanske det enklaste sättet är att bara dela polynomer. Det är inte så svårt att räkna

$$\frac{x^2+2x}{x-3} = x + 5 + \frac{15}{x-3}$$

och mycket sant, när $x \to \infty$ vi kan nonchalera den tredje termen som jag försökte blekna bort. Den sneda asymptoten är faktisk $y = x + 5$. Nu skillnaden mellan funktionen och asymptoten närmar sig 0:



Varför kunde vi inte tappa bort 3:an i nämnaren? Finns det någon metod vi kan använda för att resonera kring detta?

Ju, Taylor satsen är vår bästa vän. I galaxens mörker, när man är strandat på en planet utan rymdskepp, det är bara att ropa ”Taylor” och hjälpen kommer. Det kan kännas lite konstig att hävda att TU hjälper oss för vi kan inte TU kring oändligheten. Mycket sant, det kan vi inte! Men det finns ett sätt att fusk utveckla kring oändligheten.

Först, vi skriver om uttrycket en smula. När man jobbar med rationella funktioner är det alltid fördelaktig att plocka fram ledandet termer, att identifiera ”den högsta hönsen” i nämnaren och täljaren och plocka den fram:

$$\frac{x^2+2x}{x-3} = \frac{x^2\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x\left(1-\frac{3}{x}\right)} = \frac{x^2}{x}\cdot\frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{3}{x}} = x\cdot\frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{3}{x}}$$

Så, nu vet vi att

$$f(x) = \frac{x^2+2x}{x-3} = xg(u), \quad u = \frac{1}{x}$$

där $g(u)$ har formen

$$g(u) = \frac{1+2u}{1-3u}$$

Notera att x och u inte är oberoende. Det viktiga att inse är att när $x \to \infty$ då $u \to 0$ för $xu = 1$. Vi kan inte göra Taylorutveckling i oändligheten av $f(x)$ men vi kan Taylor utveckla $g(u)$ kring $u = 0$:

$$g(u) = 1 + 5u + O(u^2)$$

Lägger vi allt ihop då får vi

$$f(x) = x\big(1 + 5u + O(u^2)\big) = x + 5xu + O(xu^2)$$

och om vi använder $ux = 1$ då får vi

$$f(x) = x + 5 + O\left(\frac{1}{x}\right)$$

och mycket sant den sneda asymptoten är $f(x) \approx x + 5$.

Hemläxa: Härma samma typ uträkning för att visa att

$$\frac{x^2 + ax}{x + b} = x + a - b + O\left(\frac{1}{x}\right)$$

Ett viktigt mellansteg är den här Taylorutvecklingen

$$\frac{1 + au}{1 + bu} = 1 + (a - b)u + O(u^2)$$

Viktig läsning och rekommenderade problem

begrepp	att läsa	att träna
differentialer och differentialkalkyl	2.2 The Derivative > Differentials; 2.2 The Derivative > DEF4; 2.2 The Derivative > Leibnitz Notation > Figure 2.16; 2.7 Using Differentials and Derivatives > Approximating Small Changes > Figure 2.25	4.9.EX3-EX5 $d\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = ?$ $\frac{\sin(x+dx)}{\cos(x+dx)} - \frac{\sin x}{\cos x} = d(?) = ?$
linjär approximation	4.9 Linear Approximations > DEF8; 4.9 Linear Approximations > Approximating Values of Functions	4.9.EX3-EX4, 4.9.11, 4.9.15, 4.9.18
medelvärdesatsen	2.8 The Mean-Value Theorem	2.8.EX1-2, 2.8.1, 2.8.2, 2.8.4
noggrannhet av linjär approximation	4.9 Linear Approximations > Error Analysis	4.9.15, 1.9.19
Taylorutveckling	4.10.TH11	4.10.EX3, 4.10.1, 4.10.2
implicit derivering	2.9 Implicit Differentiation	2.9.EX1, 2.9.EX3, 2.9.1-2, 2.9.10
den stora O notationen	4.10 Taylor Polynomials > DEF9 (Big-O Notation)	
sned asymptot	4.6 Sketching the Graph of a Function > DEF7 (Oblique asymptote)	