

Contents

1	W1 Gymnasiematte: påminnelse om saker vi behöver	1
2	W2 gränsvärdet, kontinuitet, och derivata grunder	1
3	W3 Derivata tillämpningar: att skatta små skillnader.....	1
4	W4 integraler: grunder och tekniker	1
5	W5 integraler: tillämpningar - längder, ytor, och volymer	1
5.1	Tillämpningar av integraler: ytor i 2D och längder av kurvor i 2D	2
5.1.1	Ytor i 2D med gränser som beskrivs av funktioner	2
5.1.2	Längder av kurvor i 2D	7
5.2	Tillämpningar av integraler: ytor i 3D som definieras med roterande funktioner	10
5.3	Tillämpningar av integraler: volymer i 3D som definieras med roterande funktioner.....	18

1 W1 Gymnasiematte: påminnelse om saker vi behöver

2 W2 gränsvärdet, kontinuitet, och derivata grunder

3 W3 Derivata tillämpningar: att skatta små skillnader

4 W4 integraler: grunder och tekniker

5 W5 integraler: tillämpningar - längder, ytor, och volymer

Syftet med integraler är att kunna lösa differentiella ekvationer, men integraler kan tillämpas till några viktiga problem som har en distinkt geometrisk känsla, och är lättare att förstå: ytor, längder, och volymer av former som inte är regelbundna. Det är alltid samma princip som används att räkna: man delar objekten man är intresserad i mindre bitar som approximeras med någonting vi kan räkna längd, yta, eller volym av. Det slutliga resultatet kan alltid uttryckas som en bestämd integral. När man väl ha fattat vad integralen handlar om, det viktigaste är att kunna använda den.

I kort, ytor i 2D som definieras av två funktioner $f(x)$ och $g(x)$ över ett intervall $[a, b]$ räknar vi med vanlig Riemann integral som förekommer i två versioner, utan (matematisk yta) och med absolut belopp (fysisk yta):

$$A_{2D} = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \quad (\text{matematisk yta})$$

$$A_{2D} = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \quad (\text{fysisk yta})$$

Längder av kurvor som definieras med funktionen $f(x)$ över ett intervall $[a, b]$, räknas med hjälp av formeln

$$L_{2D} = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Ytor som man får om en funktion roterad, alltså en "embedded" yta i 3D räknar vi med

$$S_{3D} = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

och volymer som definieras på samma sätt räknas med

$$V = \int_a^b \pi f(x)^2 dx$$

Processen är alltid densamma:

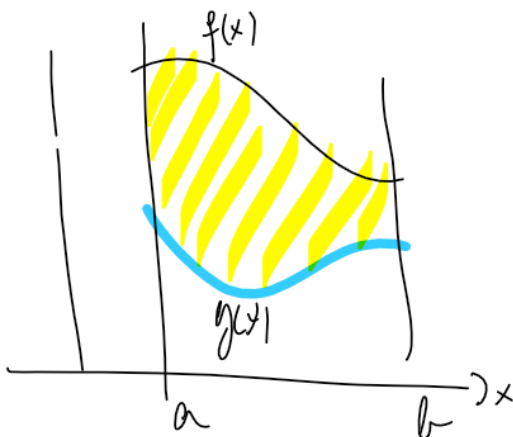
- (1) Identifiera $f(x)$ (och eventuellt $g(x)$) för problemet
- (2) Identifiera integrations gränser a och b
- (3) Välj en av de formler ovan som passar till problemet

5.1 Tillämpningar av integraler: ytor i 2D och längder av kurvor i 2D

5.1.1 Ytor i 2D med gränser som beskrivs av funktioner

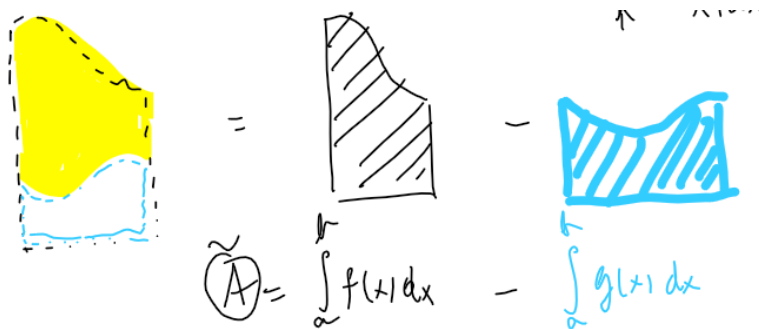
Vi börjar med det enklaste, någonting vi redan i princip vet: ytor i 2D med gränser som beskrivs av två funktioner f och g . Dessa funktioner kan begränsa ytan i två led: (i) x-led eller i (ii) y-led. Om fall (i) då jobbar vi med gränser definierade med $y = f(x)$ och $y = g(x)$; om fall (ii) då jobbar vi med gränser definierade med $x = f(y)$ och $x = g(y)$. Vi diskuterar enbart x-led i kompendiet. Det blir ganska enkelt att generalisera till y-led om det behövs.

Den matematiska ytan: Ytan där vi bryr oss om tecken. En typisk yta vi är intresserade i ser ut som i bilden:

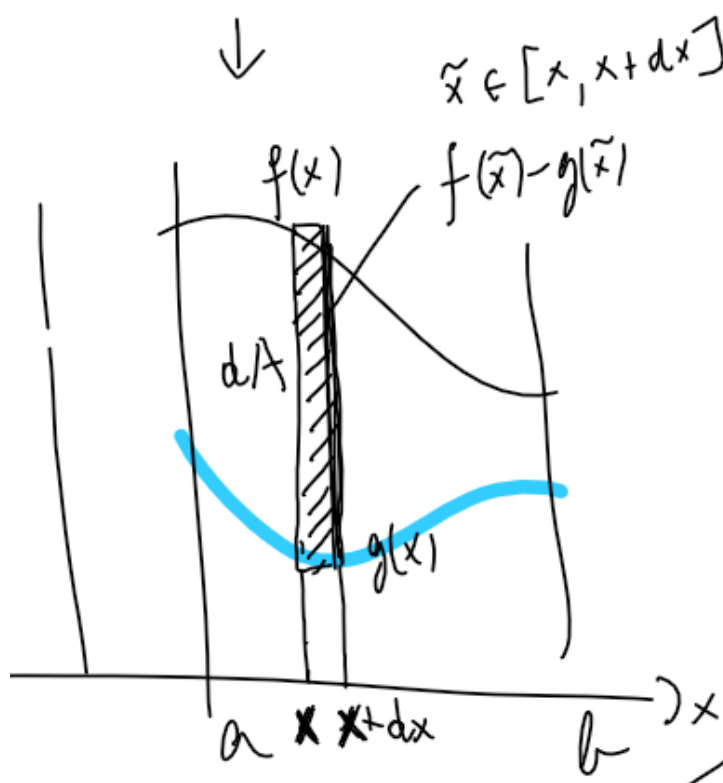


Målet är att räkna den gula ytan. Det finns två sätt att tänka.

Sätt 1: Subtrahera den mindre ytan från den som är större.



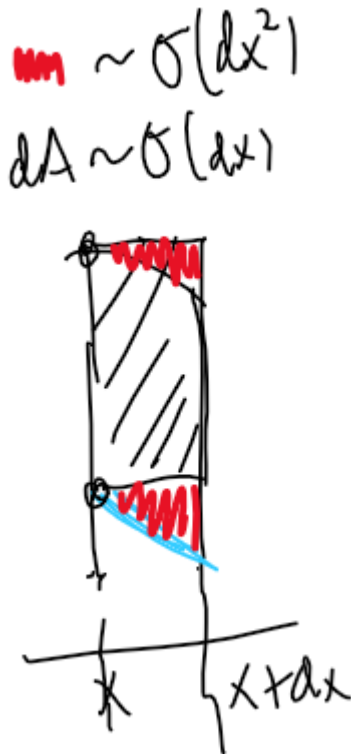
Sätt 2: Dela den stora ytan i infinitesimala ytor som är enkla att räkna.



Vi räknar den stora ytan med att summera över alla små ytor:

$$A = \int_0^A dA$$

Från bilden ovan ser vi att $dA = (f(\tilde{x}) - g(\tilde{x}))dx$ där $\tilde{x} \in [x, x + dx]$. På grund av att vi jobbar med infinitesimala tal behöver vi inte vara oroliga vilken $\tilde{x}$ vi väljer. Man kan enkelt argumentera att om vi väljer den vänstra kanten, alltså $\tilde{x} = x$, då skillnaden från den riktiga yta är försumbart. Titta på det röda området i bilden. Alla kanter som definierar den röda ytan i bilden är proportionella mot dx . Alltså längden δ_k av en kant k är sådan att $\delta_k = \alpha_k dx$ där α_k är ett tal som beror inte på dx . De små ytor är alltid proportionella med en produkt av längder av två kanter k och l : $\delta_k \delta_l \propto \alpha_k \alpha_l dx^2 \sim dx^2$.



Om vi väljer den vänstra kanten då får vi

$$dA = (f(x) - g(x))dx$$

så ytan kan räknas som

$$A = \int_0^A dA = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

Den fysiska ytan: Ytan där vi ignorerar tecken. I princip det är samma uträkning som för den matematiska ytan, men vi måste använda absolut belopp under integralen:

$$A = \int_0^A |dA| = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$

För att räkna sådana ytor kan man använda flera olika tricks. Trick 1: använda faktum att ytan kan vara positivt eller negativt. Trick 2: använd spegling i x och y led. Ibland detta kan leda till enklare funktioner och enklare integraler.

Några exempel som visar hur man jobbar med olika typer av ytor (fysiska mot matematiska)

För att förstå skillnaden mellan den matematiska ytan och den fysiska ytan en viktig bild att studera är

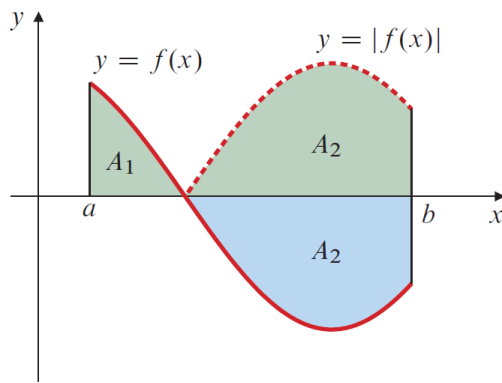


Figure 5.27

och en viktig grej är att fatta skillnaden mellan dessa två integraler

$$\int_a^b f(x) dx = A_1 - A_2 \quad \text{and} \quad \int_a^b |f(x)| dx = A_1 + A_2$$

Notera att i ekvationer A_1 och A_2 föreställer ytor och är positiva tal. Så ekvationer kopplar geometri (ytor) med analys (integraler på den vänstra sidan av ekvationer). Den första integralen kan bli positivt eller negativt för skillnad mellan två positiva tal kan bli positivt eller negativt. Den andra måste vara positivt: ingen chans att summan av två positiva tal blir negativt. ADAMS skriver väldigt bra om vad skillnaden föreställer och jag kommer inte att orda mycket om det. Se

AD/5.7 Areas of Plane Regions

för detaljer. Några bra problem att öva på som är enklare ytor är AD/5.7.1, 5.7.2, 5.7.3, 5.7.4. Lite svårare problem som har med komplicerade ytor att göra är AD/5.7.17, 5.7.18. Bra exempel att dugga igenom följer.

EXAMPLE 1 The area bounded by $y = \cos x$, $y = 0$, $x = 0$, and $x = 3\pi/2$ (see Figure 5.28) is

$$A = \int_0^{3\pi/2} |\cos x| dx$$

Just för det här problemet menar ADAMS att man skall räkna den fysiska ytan. Det är viktig att rita grafen, annars är det jättejobbigt att jobba med sådana problem.

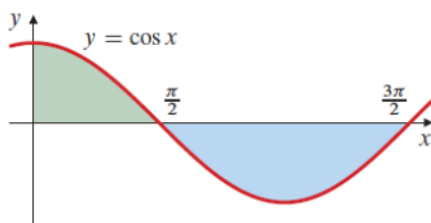


Figure 5.28

Problemet är att den gröna och den blåa ytan har olika tecken, den första är positiv och den andra är negativ.

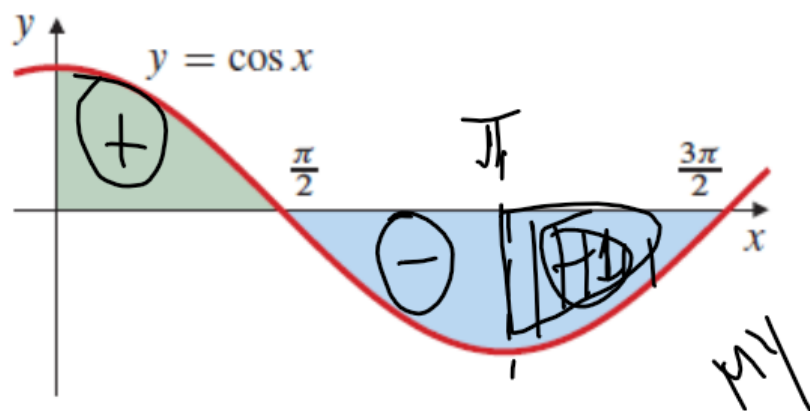


Figure 5.28

Alltså det skulle vara fel att räkna $A = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \cos x \, dx$ för det skulle ge den matematiska ytan

$$A_{MY} = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \cos x \, dx = \sin x \Big|_0^{\frac{3\pi}{2}} = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \sin 0 = -1 - 0 = -1$$

Om vi räknar med absolut belopp då får vi rätt form på grafen och ytan

$$A_{FY} = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} |\cos x| \, dx$$

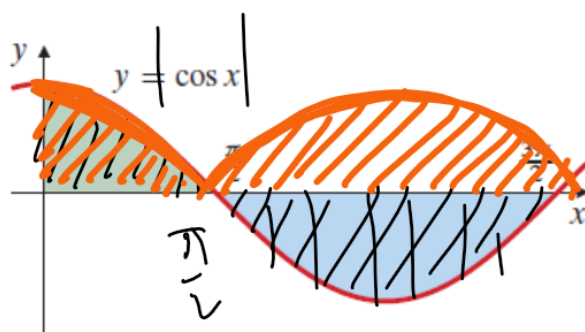


Figure 5.28

Här är problemet att vi måste integrera en funktion med absolut belopp inkluderat. Det skulle vara svårt att hitta den primitiva funktionen till $|\cos x|$ i en form som är enkel. Det finns ingen annan utväg än att grundligt studera teckenbyte och dela integralen över intervaller där tecknet ändras inte. Så vi måste bli av med absolut belopp på det vanliga sättet! Från grafen vi kan se exakt i vilka punkter $\cos x$ byter tecken. I kort, vi måste vara superförsiktiga hur vi tar bort absolut belopp.

$$A_{FY} = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} |\cos x| \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos x| \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |\cos x| \, dx$$

I det första intervallet $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ har vi $|\cos x| = \cos x$ och

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos x| \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin 0 = 1 - 0 = 1$$

I det andra intervallet $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ kan vi skriva $|\cos x| = -\cos x$ och integralen bli

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |\cos x| dx = - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x dx = - \left(\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) = -(-1 - 1) = 2$$

Så den fysiska ytan är lika med

$$A_{FY} = 1 + 2 = 3$$

5.1.2 Längder av kurvor i 2D

Man räknar längden av en kurva med att dela det hela längden L i små bitar Δl

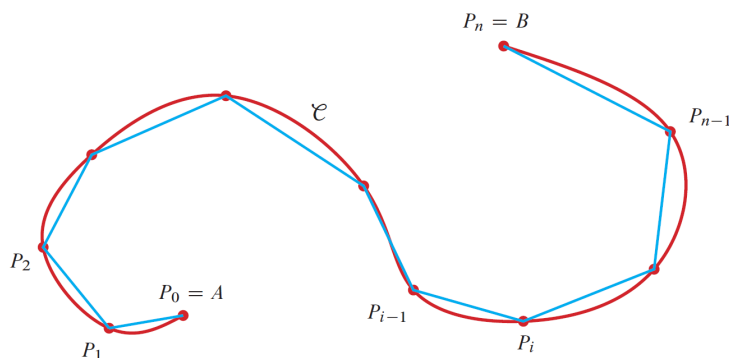


Figure 7.21 A polygonal approximation to a curve $\mathcal{C}$

På det sättet den totala längden blir en summa av alla dessa små längder

$$L \approx \sum \Delta l$$

Notera att ADAMS använder Δs istället för Δl . Det är bra att ni vänjer er med olika bokstäver, för i litteraturen är dl väldigt vanligt. Så när $\Delta l \rightarrow dx$ då summan omvandlas till en bestämd integral

$$L = \int dl$$

Så vi byter approximations tecken mot likhet. Det är en stor grej för det betyder att vi kan i princip räkna längder exakt.

När kurvan är en graf: Om kurvan beskrivs som en graf av en funktion då kan vi hitta ett ganska enkelt uttryck för dl . Det viktigaste i det hela är att fatta hur man räknar Δl eller dl . ADAMS gör det väldigt bra så jag hänvisar till

AD/7.3 Arc Length and Surface Area

Se texten kring grafen och ekvationen

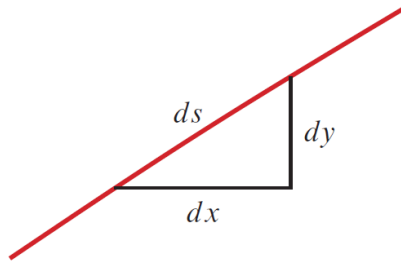


Figure 7.22 A differential triangle

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

Resultat är att längden kan räknas med hjälp av

$$s = \int_{x=a}^{x=b} ds, \quad \text{where} \quad ds = \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Några bra problem att öva på är AD/7.3.1, 7.3.2, 7.3.7, 7.3.8. Jag skulle rekommendera att ni börjar med att gå igenom 7.3.EX1.

När kurvan inte är en graf: Då kan vi införa ett koordinatsystem och dela kurvan in mindre bitar som är funktionen. Här ser ni olika delar av kurvan från ADAMS som är funktioner. Dessa är markerade med olika färger.

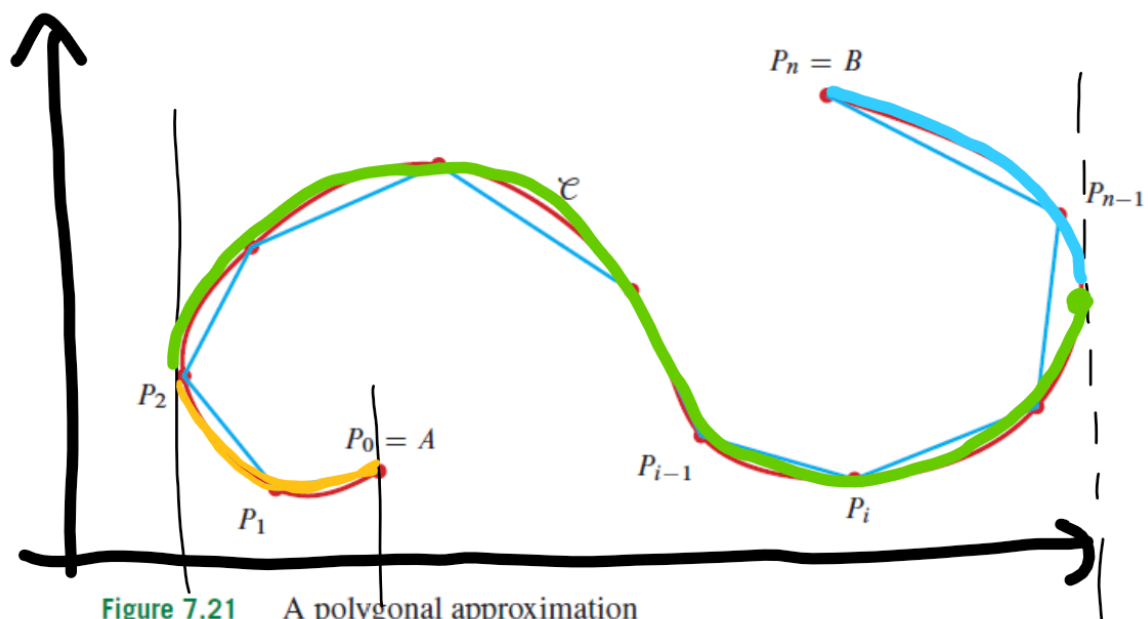


Figure 7.21 A polygonal approximation to a curve $\mathcal{C}$

Att räkna längder av kurvor är en ganska mekanisk process. Se på det här exemplet från ADAMS:

EXAMPLE 1 Find the length of the curve $y = x^{2/3}$ from $x = 1$ to $x = 8$.

Solution Since $dy/dx = \frac{2}{3}x^{-1/3}$ is continuous between $x = 1$ and $x = 8$ and $x^{1/3} > 0$ there, the length of the curve is given by

$$\begin{aligned} s &= \int_1^8 \sqrt{1 + \frac{4}{9}x^{-2/3}} dx = \int_1^8 \sqrt{\frac{9x^{2/3} + 4}{9x^{2/3}}} dx \\ &= \int_1^8 \frac{\sqrt{9x^{2/3} + 4}}{3x^{1/3}} dx \quad \text{Let } u = 9x^{2/3} + 4, \\ &\quad du = 6x^{-1/3} dx \\ &= \frac{1}{18} \int_{13}^{40} u^{1/2} du = \frac{1}{27} u^{3/2} \Big|_{13}^{40} = \frac{40\sqrt{40} - 13\sqrt{13}}{27} \text{ units.} \end{aligned}$$

Man bara tillämpar receptet vi har diskuterat. Ibland kan man räkna integralen analytisk, ibland inte. Om inte, då använder vi numerisk integration som Trapez eller Simpson.

Vi fortsätter med att kontrollera att receptet stämmer med våra förväntningar angående enkla geometriska former!

Exempel: Den raka linjen. Den raka linjen som går igenom punkter $(0,0)$ och (a,b) . Linjen beskrivs med ekvationen $f(x) = kx + m$ sådan att $f(0) = 0$ och $f(a) = b$. Vi vet att $m = 0$ och $b = ka$ som ger $k = b/a$. Det är en enkel gymnasimatematik problem att visa detta. Funktionen vi jobbar med är $f(x) = \frac{bx}{a}$ och $x \in [0, a]$. För att tillämpa receptet behöver vi derivatan $f'(x) = \frac{b}{a}$. Om vi tillämpar receptet:

$$L = \int_0^a \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = \int_0^a \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} dx = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} \int_0^a dx = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} a$$

med att "krypa" med a under roten (glöm inte att a blir a^2 då) och enkel algebra kan vi visa

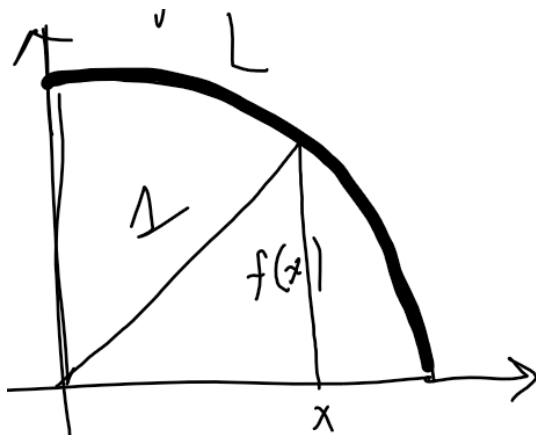
$$\sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} a = \sqrt{\left(1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2\right) a^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

och vi reproducerar Pythagoras satts.

$$L = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Inte så konstig, för vi använde satsen att räkna vad dl är.

Exempel: En kvart av cirkel. Ett bra exempel att gå igenom själv är att räkna längden på en fjärde del av cirkel med en vis radie. Vi vet att denna längd måste vara $2\pi/4$ alltså $\pi/2$. Ett "syskon" exempel är 7.3.EX4 som är samma problem strukturellt sett med handlar om en elips istället.



Från bilden vi ser att cirkeln beskrivs med grafen av en funktion $f(x)$ som tillfredsställer den här ekvationen $1 = x^2 + f(x)^2$. Löser man ekvationen då får vi $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Längden av kurvan kan räknas som

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2}} dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \sin^{-1} 1 - \sin^{-1} 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

och det stämmer med våra förväntningar att längden av en fjärdedel av cirkeln borde vara $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

5.2 Tillämpningar av integraler: ytor i 3D som definieras med roterande funktioner

Det är kanske det svåraste delen av boken att begripa sig på. Alltså kanske det svåraste i ADAMS att gå igenom är kapitel

AD/7.3 Arc length and surface area > Areas of Surfaces of Revolution

som betraktar problemet att räkna ytan som i bilden

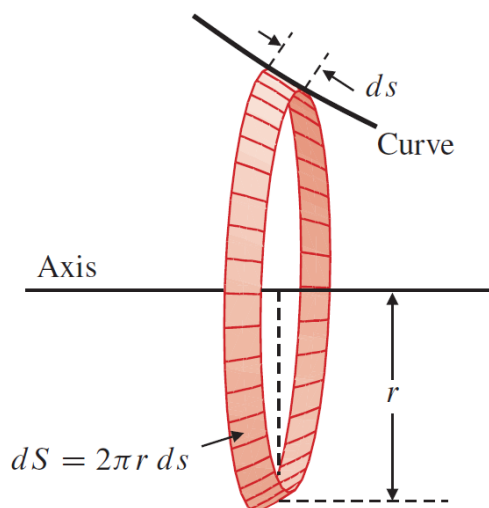


Figure 7.26 The circular band generated by rotating arc length element ds about the axis

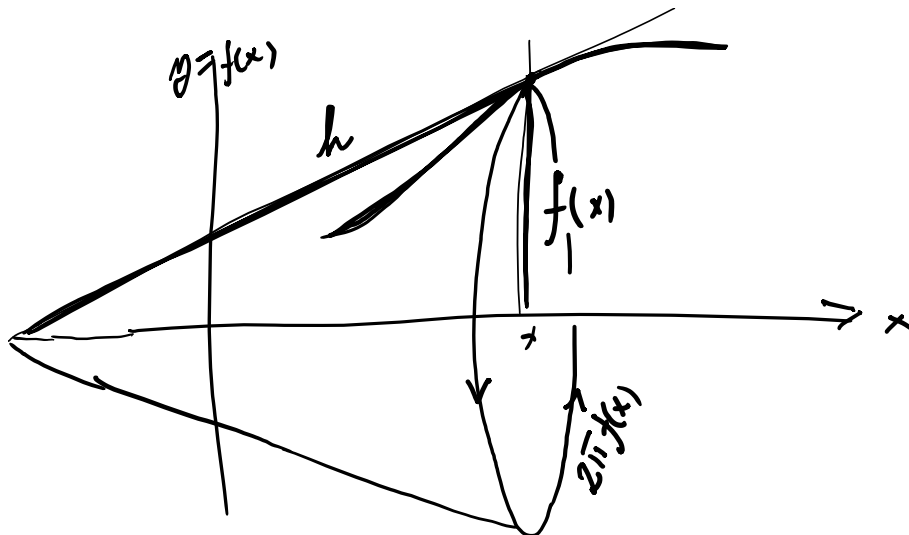
Det svåraste principen att fatta är hur man räknar dS . Som ADAMS skriver själv

Remark Students sometimes wonder whether such complicated formulas are actually necessary. Why not just use $dS = 2\pi|y|dx$ for the area element when $y = f(x)$ is rotated about the x -axis instead of the more complicated area element $dS = 2\pi|y|ds$? After all, we are regarding dx and ds as both being infinitely small, and we certainly used dx for the width of the disk-shaped volume element when we rotated the region under $y = f(x)$ about the x -axis to generate a solid of revolution. The reason is somewhat subtle. For small thickness Δx , the volume of a slice of the solid

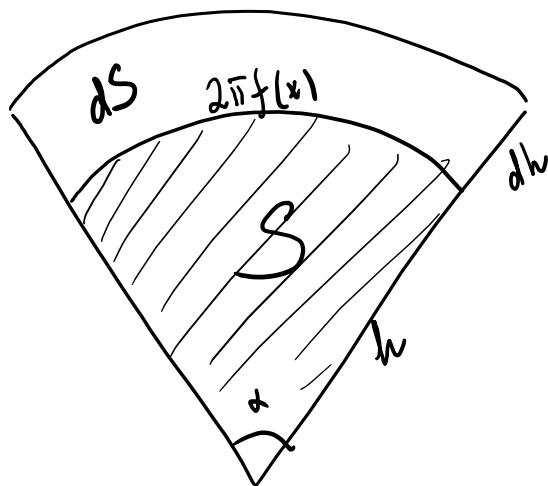
Alltså frestelsen är stor att skriva $dS = 2\pi f(x)dx$ och det är **fel** för den **rätta** formeln är $dS = 2\pi f(x)ds$ eller i kompendiets notation $dS = 2\pi f(x)dl$. Jag har försökt hitta ett bra sätt att förklara det på men sannerligen är det inte lätt. En bra minnesteknik är att tänka fel och sen komma ihåg att byta dx i sista stunden mot dl .

Bevis 1 för ytaelement dS :

Det viktigaste för beviset är "den tangerande konen". Det är konen som man får om man förlänger tangenten i punkten $(x, f(x))$. Bilden visar hur det blir om vi gör så:



Om vi öppnar konen då får vi en skiva med vinkel α och radien h som bilden visar



Vi behöver inte veta vad radien av skivan är, dock vi kunde räkna den om vi skulle vilja göra så. Vi vet exakt vad vinkeln α är. Vi kommer att prata om det senare. Ytan av skivan är

$$S = \pi h^2 \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{\alpha h^2}{2}$$

för om $\alpha = 2\pi$ då skulle vi få hela cirkelns area med radie h . Så formel ovan stämmer. Nu undrar vi hur mycket ändrar sig ytan om vi ökar h en smula till $h + dh$ men behåller samma vinkel.

$$dS = S(h + dh) - S(h) = \frac{\alpha(h + dh)^2}{2} - \frac{\alpha h^2}{2} = d\left(\frac{\alpha h^2}{2}\right) = \frac{\alpha 2h}{2} dh = \alpha h dh$$

Det intressanta med formel ovan är att αh kan bytas ut till någonting som vi vet. Nämligen, för vinkel α det måste vara så att

$$\alpha = \frac{\text{båge}}{\text{radie}} = \frac{2\pi f(x)}{h}$$

som ger oss att

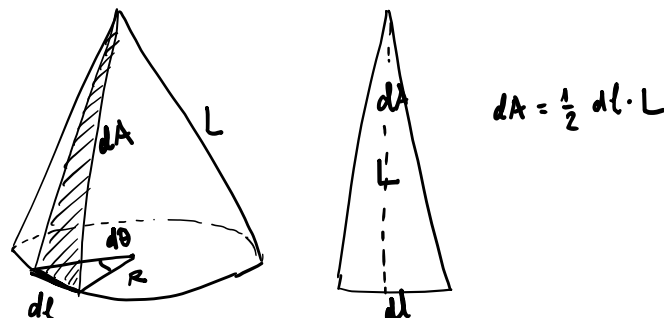
$$\alpha h = 2\pi f(x)$$

Så slutligen kan vi skriva

$$dS = \alpha h dh = 2\pi f(x) dh$$

Det där med hur kombinationen αh byts ut i formel är tokig men sant. Det här beviset är det bästa (i pedagogisk mening) som jag lyckades åstadkomma dock i sanningens namn det är en ganska krånglig uträkning.

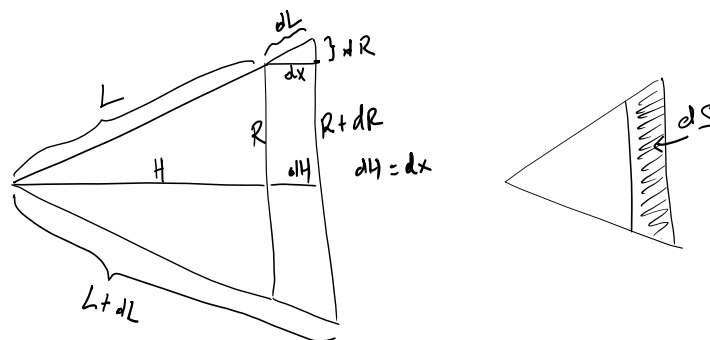
Bevis 2 för ytaelement dS : Vi räkna den yttre ytan av en kon som har en vis höjd H , radien R , och längden av den yttre kanten L , precis som bilden visar. Höjden H blir inte viktig för oss. Det hela ytan S kan räknas om en enkel integral. Se bilden för att se hur ytaelement är konstruerat.



En bra fråga här. I bilden ovan, spelar det någon roll om L är höjden eller kanten av triangeln? Vi summerar över alla små ytor som i bilden.

$$S = \int dA = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cdot dl \cdot L = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} R \cdot d\theta \cdot L = \frac{RL}{2} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{RL}{2} 2\pi = \pi RL$$

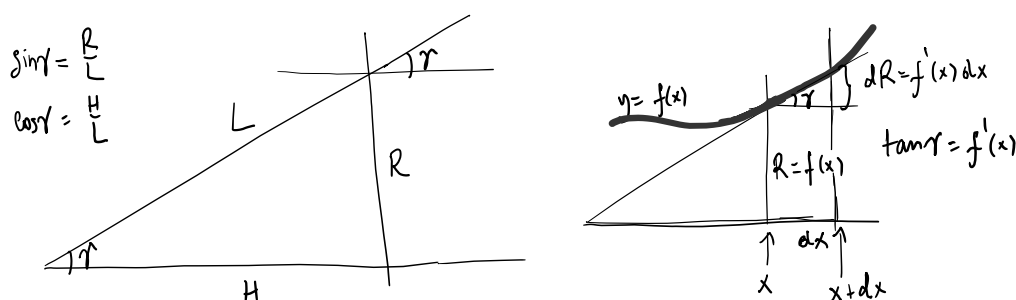
Nu räknar vi skillnaden när ytan ökar. För att göra det vi ökar x en smula. Se bilden



Då skillnaden i ytan kan räknas som

$$dS = S_{nytt} - S_{gammalt} = \pi(R + dR)(L + dL) - \pi RL = \pi(RdL + LdR)$$

Vi vet att $R = f(x)$ så det måste vara sant att $dR = f(x + dx) - f(x) = f'(x)dx$. Ändringar dR och dL måste vara proportionella för vi ser från bilden nedan att $\sin \gamma = R/L$ ändras inte oavsett R och L , alltså det alltid sant att $R = L \sin \gamma$.



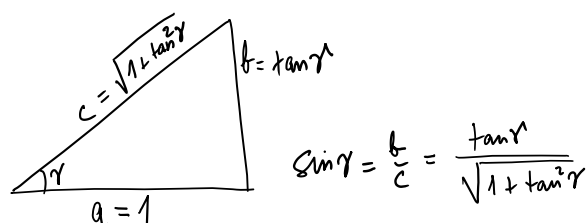
Så nu vet vi att $dL = dR / \sin \gamma$. Men, vi vet också att $\tan \gamma = f'(x)$. Pusslar vi ihop all får vi

$$dS = \pi(RdL + LdR) = \pi \left(R \frac{dR}{\sin \gamma} + LdR \right) = \pi \left(\frac{R}{\sin \gamma} + L \right) dR = \pi R \left(\frac{1}{\sin \gamma} + \frac{L}{R} \right) dR$$

Nu använder vi att $\frac{L}{R} = \frac{1}{\sin \gamma}$. Detta ger oss

$$dS = \pi R \left(\frac{1}{\sin \gamma} + \frac{1}{\sin \gamma} \right) dR = \frac{2\pi R}{\sin \gamma} dR$$

Nu har ett gymnasie matematik problem. Om vi vet att $\tan \gamma = f'(x)$ hur kan vi räkna $\cos \gamma$. Om man använder bilden



får vi

$$\sin \gamma = \frac{\tan \gamma}{\sqrt{1 + \tan^2 \gamma}} \Rightarrow \frac{1}{\sin \gamma} = \frac{\sqrt{1 + \tan^2 \gamma}}{\tan \gamma}$$

Nu är vi en smula närmare lösningen:

$$dS = \frac{2\pi R}{\sin \gamma} dR = 2\pi R \frac{\sqrt{1 + \tan^2 \gamma}}{\tan \gamma} dR$$

Det är dags att komma ihåg hur funktionens form styr det hela: $\tan \gamma = f'(x)$ och $R = f(x)$ med $dR = f'(x)dx$, och nu kan vi pussla ihop alla komponenter:

$$dS = 2\pi f(x) \frac{\sqrt{1 + f'(x)^2}}{f'(x)} f'(x) dx = 2\pi f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

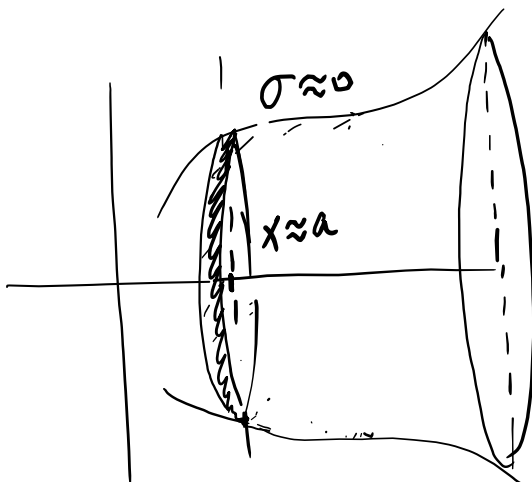
Och nu kan man undra om det här beviset är enklare än den första. Som vanligt när man väl anar hur det hela går till, då är det viktigt att kunna använda resultatet.

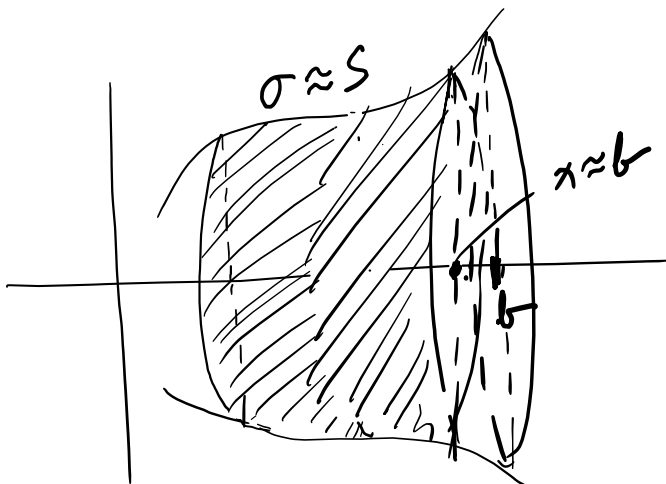
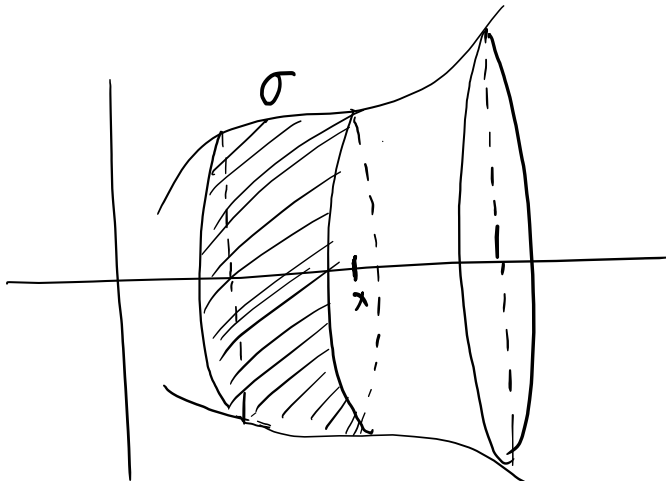
Från ytaelement till integral

För att slutföra beviset för hela ytan behöver vi pussla ihop allt vi har räknat. Nu när vi vet ytaelement dS hur kan vi räkna hela ytan. Vi kan göra det här på två olika sätt, välj den ni föredrar. Innan vi förklarar dessa två sätt låt oss byta notationen en smula för det kommer att bli praktisk, uträkningar kommer att bli mera begripliga. Låt oss skriva dS som $d\sigma$.

$$d\sigma = 2\pi f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Det ser man kanske inte direkt men σ är en variabel som beskriver hur ytan varierar när x ändras. Det är precis vad ekvationen ovan förklarar till oss. Den säger exakt hur mycket ytan ändras om vi förändrar x en smula, och ändringen beror på referenspunkten x . Se bilder för tre instanser av problemet när $x \approx a$ (vi har början på ytan), när $a < x < b$ (mittemellan), och när $x \approx S$ (vi har nästa fyllt med hela ytan).





Den visar ytan σ för en viss val av x . Alltså vi vet att ytan σ är en funktion av x : $\sigma = \rho(x)$. Vi vet faktisk vad derivatan av $\rho(x)$ är. Den är exakt lika med

$$\rho'(x) = \frac{d\sigma}{dx} = 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}$$

Vad vet vi mera om $\rho(x)$? Ja, inte mycket mera än att vi vet vad derivatan av $\rho(x)$ men sund förnuft säger att det borde vara så att $\rho(a) = 0$ och $\rho(b) = S$.

Varför är $\rho(a) = 0$? Ju, om $x = a$ då har vi precis börjat med att rotera grafen och vi har bara en punkt som vi roterar runt. När en sådan punkt sveper runt den bara lämnar en linje som spår. Linjer har ingen yta, alltså det måste vara så att $\rho(a) = 0$. Varför är $\rho(b)$ lika med S ? Ja, om $x = b$ då har vi precis nått den hela yta vi är intresserade i. Alltså det måste vara så att $\rho(b) = S$.

Nu har vi börjat nudda på ett superkollosaltviktigt koncept i matematiken: *randvillkor*. När man bestämmer värdet på funktioner på det här sättet heter i matematiken att man bestämmer randvillkor för problemet. Randvillkor för vårt problem uttrycks exakt i två ekvationer

$$\begin{aligned}\rho(a) &= 0 \\ \rho(b) &= S\end{aligned}$$

Det finns ingen uträkning som säger att det skall vara så. Det är sund förnuft om problemet som hjälper oss avgöra att det måste vara så. Nu återgår vill tillbaka till målet att konstruera den slutliga integralen och diskuterar två sätt man kan göra det på.

Sätt 1: Att tolka ekvationen för ytaelement som en differentialekvation.

Integrerar vi den vänstra och den högra leden av $\rho'(x) = 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}$ över intervallet vi är intresserade i, alltså mellan $x = a$ och $x = b$, får vi

$$\int_a^b \rho'(x) dx = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Låt oss betrakta den vänstra leden av ekvationen.

$$\int_a^b \rho'(x) dx = \rho(b) - \rho(a)$$

Nu kan vi äntligen skriva

$$\int_a^b \rho'(x) dx = \rho(b) - \rho(a) = S - 0 = S$$

och då har vi visat att

$$S = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Sätt 2: Att tolka ekvationen för ytaelement som ett integrations variabel i en bestämd integral. Om vi betraktar σ som integrations variabel då kan vi ganska enkelt kolla att följande kort uträkning är konsistent med hur vi räknar integraler. Det är ganska enkelt att visa

$$S = \int_0^S d\sigma$$

Det är ju bara att använda analysens huvudsats:

$$\int_0^S d\sigma = \sigma|_0^S = S - 0 = S$$

Den primitiva funktionen av $f(\sigma) = 1$ är ju $F(\sigma) = \sigma$ på samma sätt som den primitiva funktionen av $f(x) = 1$ är $F(x) = x$. Allt är konsistent. Att vi kallar variabel för σ istället för x spelar ju ingen roll.

Som vi har diskuterat, vi vet att ytan är en funktion av x , $\sigma = \rho(x)$, och vi vet att $\rho(a) = 0$ och $\rho(b) = S$. Då kan vi använda satsen från ADAMS (som vi har använt väldigt många gånger) som handlar om variabel byte. Vi vill byta integrations variabel från sigma till x och då gör vi en variabel substitution. Vad är lite konstig här är att vi vet inte hur $\rho(x)$ ser ut. Vi gör variabel byte ändå: $\sigma = \rho(x)$. Som vanligt vi behöver omvandla $d\sigma$ till dx . Vi räknar $d\sigma = d(\rho(x)) = \rho'(x)dx$ enligt GDR. Då kan vi utföra variabel byte som vi brukar göra

$$S = \int_0^S d\sigma = \int_{x_1}^{x_2} \rho'(x) dx$$

Enligt satsen i ADAMS, integrations gränser måste vara konsistenta med variabel byte i användar. Integrationsgränser måste matcha på det här sättet:

$$\begin{aligned} 0 &= \rho(x_1) \\ S &= \rho(x_2) \end{aligned}$$

Men vi vet från den tidigare diskussion att $\rho(a) = 0$ och $\rho(b) = S$. Då måste det vara så att $x_1 = a$ och $x_2 = b$. Nu vet vi att

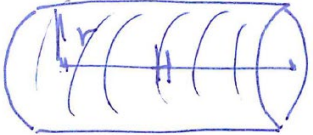
$$S = \int_0^S d\sigma = \int_{x_1}^{x_2} \rho'(x) dx = \int_a^b \rho'(x) dx = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Att använda receptet

Några bra exempel att börja gå igenom är [7.3.EX5](#) (bevis för att area av en klot med radie r är $4\pi r^2$) och syskonexemplet [7.3.EX6](#). Viktiga exempel som ni kan göra själva är att ta kända geometriska former (cylinder, kon) och kolla att formler som ni använde under gymnasiet är korrekta, alltså härled kända gymnasiet formler.

Gymnasiematteexempel 1: ytan av en cylinder.

Exempel: ytan av cylinder

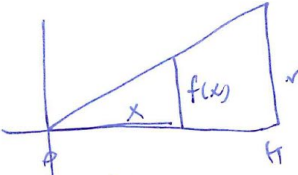


$$A = \int_0^H 2\pi f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

$$A = \int_0^H 2\pi r \sqrt{1 + 0^2} dx = 2\pi r \cdot H$$

Gymnasiematteexempel 2: ytan av en kon.

Exempel: ytan av en kon



$$\frac{f(x)}{x} = \frac{r}{h} \quad f(x) = \frac{r}{h} \cdot x$$

$$A = \int_0^h 2\pi \frac{r}{h} \cdot x \sqrt{1 + \left(\frac{r}{h}\right)^2} dx = 2\pi \frac{r}{h} \sqrt{1 + \left(\frac{r}{h}\right)^2} \int_0^h x dx$$

$$= 2\pi \frac{r}{h} h^2 \sqrt{1 + \frac{r^2}{h^2}} \int_0^1 u du$$

$$= 2\pi r \sqrt{h^2 + r^2} \frac{1}{2} = \pi r \sqrt{h^2 + r^2}$$

Det viktigaste är att ni kan använda "receptet" ovan. Vad betyder detta i praktiken? Ju, att ni kan identifiera vad $f(x)$ är och vilka integrationsgränser ni skall använda, alltså att ni vet vad a och b är i ekvationen ovan. Att laga mat man måste ju vara bekant med råvaror, inte sant? Några bra problem att träna på är 7.3.23, 7.3.26, och 7.3.32.

5.3 Tillämpningar av integraler: volymer i 3D som definieras med roterande funktioner

Jag har märkt att de här kapitlen inte brukar vara så svåra för studenter

AD/7.1 Volumes by Slicing – Solids of Revolution

AD/7.2 More volumes by slicing

så jag kommer att orda minst om sådant.

Det enda jag skulle vilja påpeka är att det finns två strategier ADAMS pratar om hur man kan räkna komplicerade volymer. Man räknar volymer på två sätt. **Sätt 1:** Att veta hur tvärsnittets area $A(x)$ beror på x (den vänstra bilden i ADAMS). **Sätt 2:** Att använda graf av en funktion och rotera den (den högra bilden i ADAMS).

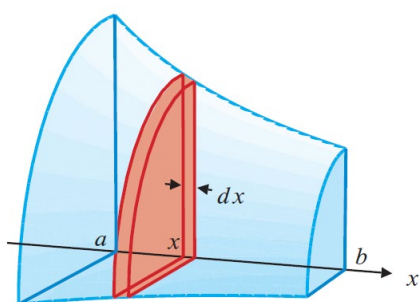
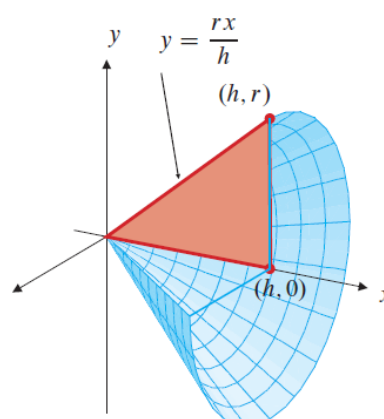


Figure 7.4 The volume element

$$V = \int_{x=a}^{x=b} dV = A(x) dx$$



7.3.EX2;

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

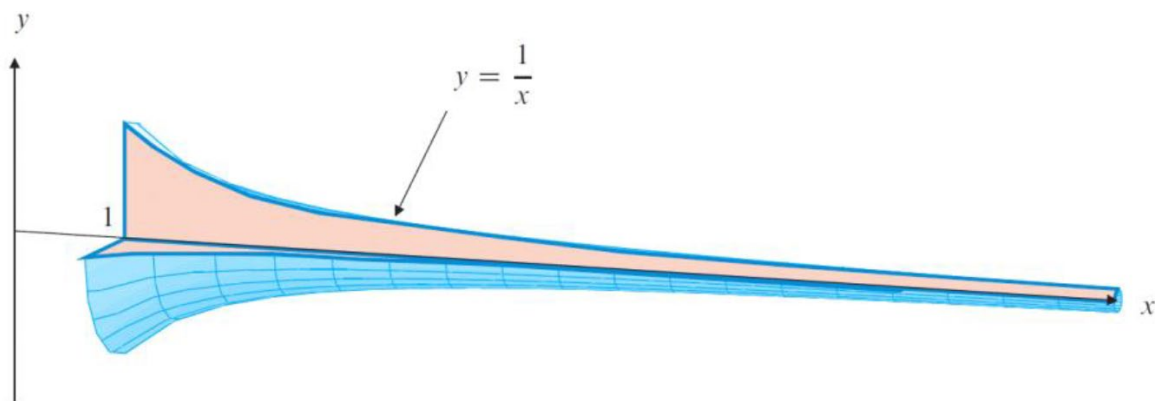
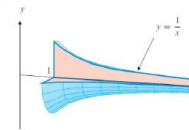
Det viktigaste att fundera över är att bekanta sig med principer hur räknar man volymelement dV . Kanske det svåraste är att fatta varför man kan förkasta visa delar av dV .

Som vanligt det är alltid en bra övning att ta gymnasimatematik objekt och verifiera att volym formler som ni fick under gymnasiet stämmer. Det finns några bra exempel i ADAMS, tex 7.3.EX2 är bra att gå igenom. Några bra problem att öva på är 7.1.1, 7.1.3, 7.1.5, och 7.1.6.

Ett väldigt roligt problem är att räkna volymen och ytan av objekt nedan. Det handlar om en oändlig lång bågaren som beskrivs av funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$. Vi visar lösningen här i kompendiet. Det intressanta med problemet är att ytan är oändlig dock volymen är inte det.

39. A hollow container in the shape of an infinitely long horn is generated by rotating the curve $y = 1/x$, ($1 \leq x < \infty$), about the x -axis.

- Find the volume of the container.
- Show that the container has infinite surface area.
- How do you explain the “paradox” that the container can be filled with a finite volume of paint but requires an infinite amount of paint to cover its surface?



Lösningen till (a):

$$V = \int_0^V dV = \int_1^\infty \pi f(x)^2 dx = \int_1^\infty \frac{\pi}{x^2} dx = \pi \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{dx}{x^2}$$

Integralen $\int_1^R \frac{dx}{x^2}$ är ganska enkel att räkna

$$\int_1^R \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_1^R = -\frac{1}{R} + \frac{1}{1} = 1 - \frac{1}{R}$$

Då vet vi att

$$V = \pi \lim_{R \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{R}\right) = \pi$$

Lösningen till (b).

: ytan av roterande $f(x) = \frac{1}{x}$ $x \in [1, \infty)$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$A = \int_1^{\infty} 2\pi \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx$$

$$\int_1^{\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} \frac{dx}{x} = \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x^3} dx \sim \int_1^{\infty} \frac{x^2}{x^3} dx$$

$$\sim \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \infty \text{ ytan är oändlig!}$$

(dock volymen är ändlig)

Fundera själva kring (c).