

Contents

1	W1 Gymnasiematte: påminnelse om saker vi behöver	1
2	W2 gränsvärdet, kontinuitet, och derivata grunder	1
3	W3 Derivata tillämpningar: att skatta små skillnader.....	1
4	W4 integraler: grunder och tekniker	1
5	W5 integraler: tillämpningar - längder, ytor, och volymer	1
6	W6 differentiella ekvationer som modellerings verktyg	1
6.1	Vad menas med modelleringsverktyg?.....	2
6.2	Klassificering av differentiella ekvationer	4
6.3	Numeriska lösningar	5
6.4	Analytiska lösningar	6
6.4.1	Separabla differentiella ekvationer av grad 1.....	7
6.4.2	H-L-grad 1-KK	7
6.4.3	IH-L-grad 1-KK	9
6.4.4	H-L-grad 1-IKK	10
6.4.5	IH-L-grad 1-IKK	11
6.4.6	H-L-grad 2-KK	14
6.4.7	IH-L-grad 2-KK	17
6.4.8	L-grad 2-IKK	19
6.4.9	L-höga grad-KK	19

1 W1 Gymnasiematte: påminnelse om saker vi behöver

2 W2 gränsvärdet, kontinuitet, och derivata grunder

3 W3 Derivata tillämpningar: att skatta små skillnader

4 W4 integraler: grunder och tekniker

5 W5 integraler: tillämpningar - längder, ytor, och volymer

6 W6 differentiella ekvationer som modellerings verktyg

Viktig läsning:

AD/18.1 Classifying differential equations

AD/7.9 First order differential equations

AD/18.4 Second order differential equations

AD/18.5 Linear differential equations with constant coefficients

AD/18.6 Non-homogeneous linear equations

AD/3.7 Second-order linear DEs with constant coefficients

Relevanta problem

AD/18.1: 1-10 (beskriva DE: ordningen, linjär/icke linjär, etc)

AD/18.1:11-12 (verifiera lösningar, är summan av lösningar en lösning?)

AD/18.1.13 (den harmoniska oscillatorn)

AD/18.1.14 (hyperboliska funktioner)

AD/18.1.16 (den karakteristiska ekvationen med reella lösningar)

AD/18.1.17 (driven harmonisk oscillatorn + att kombinera homogen och partikulär lösning)

AD/18.1.18 (att kombinera homogen och partikulär lösning)

AD/3.7:1-12 (general solution to the second order DE)

AD/3.7:13-15 (initial value problems, second order DE)

AD/3.7:26-28 (harmonic oscillator)

AD/7.9:1-10 (separable equations) <= detta är viktig, gör så många ni kan för att utveckla

känslan

AD/7.9:11-16 (metod II, generellt lösning – fria konstanter)

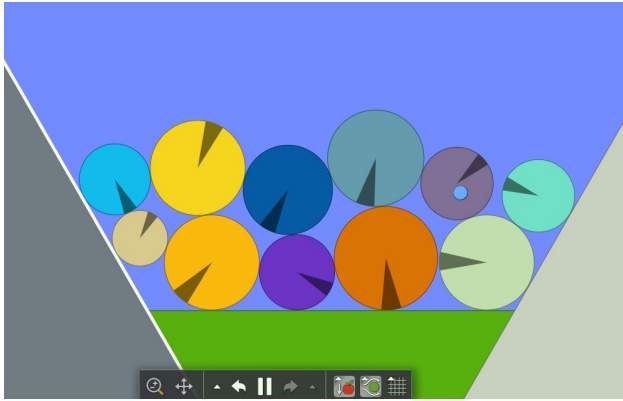
AD/7.9:17-20 (metod II, lösning med begynnelsevillkor – inga fria konstanter)

6.1 Vad menas med modelleringsverktyg?

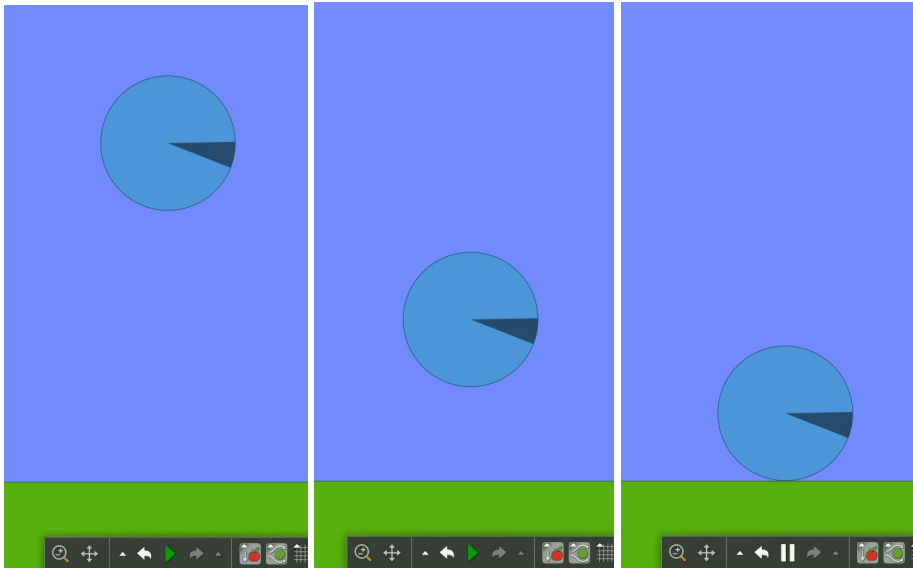
Vi menar verktyg som hjälper oss att förutse hur verkligheten kommer att se ut. Tex om ni tittar på bilden nedanför som föreställer objekt som rör sig i gravitationsfält, kan studsas mot varandra, och det finns friktion.



Kan vi säga hur de kommer att röra sig över tiden? Det är ganska uppenbart att detta är ett väldigt komplicerat problem. Programmet som jag kör fungerar som en simulator. Man kan "simulera" verkligheten, som det var på riktigt, men utan att behöva bygga det vi vill undersöka. Om jag startar simulatoren (vill ni leka med den ni kan ladda ner den, den är gratis: <http://www.algodoo.com/>) då ser man att det verkligen blir en ganska komplicerad rörelse, trots att alla massor står stilla i tiden $x=0$. Alla massor kommer att samlas i botten, men kan vi säga hur de kommer att ordnas och vridas? Här är det slutliga resultatet av simuleringen



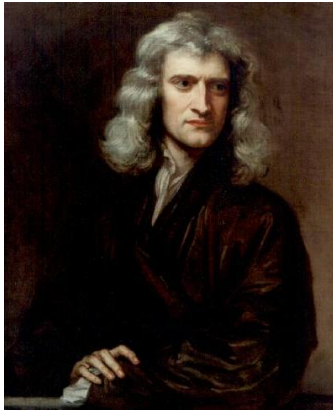
För att förstå hur man simulerar ett sådant komplicerat system behöver man hålla reda på ganska många variabler, positionen av varje massa i systemet, och massor kan rotera. Ni ser att små skivor som markerar hur varje masa är roterat har ändrats från den ursprungliga positionen. Så, låt os ta någonting enklare. En enda massa som ramlar ner, den studsar från marker och lugnar sig tills slut:



Det här problemet är hoppas så enkelt att vi kan diskutera en modell. Hur kan vi beskriva modellen på ett matematiskt korrekt sätt utan att behöva göra experiment? Anta att variabel x mäter tid. Anta att cirkel har massa m , och anta att styrka av gravitationsfältet är g . Låt y mäta avstånd till jorden (den gröna ytan i bilden) från den ursprungliga positionen. Att utveckla en modell betyder att vi kan säga hur y kommer att bero på tid! Vi vill hitta en algoritm att för varje tidpunkt x kunna räkna vad höjden y kommer att bli.

I den här konstiga världen är det så att y kan räknas från den här ekvationen

$$y''(x) = g$$



Varför är det så? Varifrån kommer ekvationen ovan? Ja, det här en kurs i matematisk analys, så vårt största problem är hur man faktisk kan gräva fram lösningen. Vi är inte så mycket intresserade varifrån sådana ekvationer kommer så vi kunde ju slippa tänka på varför ekvationen ser ut som den ser ut. Men, för er som är alltför nyfikna för att nöja sig med ett sådant argument, det fanns ju en gubbe som somnade under äppleträdet¹ som träffades av ett äpple och klurade ur om hur man skall beskriva gravitationskraften och kom fram till att $F = mg$. Kombinerar man detta med insyn att

$$F = ma$$

där a är accelerationen då får vi ekvationen

$$ma(x) = mg$$

och då hugger matematiskanalys in som säger att acceleration definieras som andra derivatan av position.

$$a(x) = y''(x)$$

och om man kombinerar allt då får vi ekvationen vi har börjat med. Är detta inte konstigt!

Om man gör matematisk modellering då är det ofta följande situation som gäller: Vi inte vet från början vad $y(x)$ är men vi vet vad derivatan av $y(x)$ är i varje tids punkt! Ofta är det första eller andra derivatan, men sällan högre derivata som är viktig. Så vad är en matematisk modell? En matematisk modell är en differentialekvation. Varför är världen uppbyggd på det här sättet? Vi vet inte, men vi vet att det hjälper IT ingenjörer hitta välbetalda jobb. Annars vem som helst kunde konstruera en avancerad motor, inte sant?

6.2 Klassificering av differentiella ekvationer

Syftet med undervisningen är att studenter skall kunna lösa första grads differentiella ekvationer analytiskt när det är möjligt. För det andra och högre grads linjära ekvationer med konstanta koefficienter, studenter förväntas kunna diskutera antal och typer av möjliga lösningar. För andra grads ekvationer, man skall ha den operativa kunskapen att lösa vilket problem som helst, med eller utan begynnelsevillkor. För andra grads ekvationer med icke konstanta koefficienter det enda man behöver kunna är att känna till och använda den allmänna principen att linjär kombination av lösningar är också en lösning, och att det finns två oberoende lösningar. Men, för att kunna behärska de här kunskaperna är det viktigt att veta om olika ekvations typer, för ofta är det så att varje typ av ekvation kräver en vis teknik att lösa. Vi kommer att klassificera differentiella ekvationer enligt följande:

- Ordinära differentiella ekvationer (ODE)
- Partiella differentiella ekvationer (PDE, flervariabelanalys)
- Homogen differentialekvation
- Icke homogen differentialekvation

¹ Jag tror ni vet vem jag tänker på 😊 (Sir Isaac Newton, 1642-1727). Utan Newton ingen gymnasiefysik.

- Linjär differentialekvation
 - med konstanta koefficienter
 - med icke konstanta koefficienter
- Icke linjär differentialekvation
- Separabla differentiella ekvationer

Olika kombinationer är möjliga dock inte alla. Det beror på. ADAMS skriver väldigt bra om olika ekvationstyper och hur man löser de så jag kommer inte att orda för mycket om det. Läs igenom kapitel som är angivna i tabellen för att behärska de olika sätt att lösa differentiella ekvationer:

ämne	att läsa
Om olika typer av differentiella ekvationer	18.1 Classifying Differential Equations
Första grad med icke konstanta koefficienter: linjära differentiella ekvationer - koefficientfunktionerna: $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$: $a(x)y'(x)+b(x)y(x)=c(x)$ - homogen/icke homogen diff ekvation - tekniker	7.9 First-Order Differential Equations > First-Order Linear Equations 18.2 Solving First-Order Equations
Separabla	7.9 First-Order Differential Equations > Separable Equations
Andra grad linjära med icke konstanta koefficienter $a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x) = f(x)$	18.4 Second-Order Linear Equations
Andra grad linjära med konstanta koefficienter $ay''(x) + by'(x) + c = f(x)$ - tillämpningar till mekaniken: tolkningen av ekvationer och randvillkor - mallen $y = e^{\lambda x}$ och den karakteristiska ekvationen (polynomet) med reella och komplexa lösningar λ_1 och λ_2	18.5 Linear DE with Constant Coefficients 18.6 Nonhomogeneous Linear Equations

6.3 Numeriska lösningar

Hur gör man om det går inte att lösa en differentialekvation analytisk. Tyvärr, är det så att vi väldigt ofta inte kan lösa en differentialekvation analytisk, då de numeriska teknikerna behövs väldigt ofta. Att kunna lösa differentiella ekvationer numerisk är ett viktigt verktyg i IT ingenjörens verktygslåda som borde hjälpa er landa välbetalda jobb. Visst, det finns en massa välbetalda jobb som man kan göra utan att kunna lösa DE numerisk, men det finns också en massa jobb som kräver de här kunskaper. Jag tvivlar att ni kan hitta anställning hos de stora svenska företag som har en R & D ("Research and Development) avdelning utan att kunna hantera differentiella ekvationer numerisk.

Anta att vi har den här differentialekvationen att lösa:

$$y'(x) = f(x)$$

där $f(x)$ är en ganska komplicerad funktion, så vi kan inte fixa det med det analytiska angreppssättet

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^x f(x)dx$$

Hur gör vi då? Jobba i små steg. Vi kommer att "krypköra" oss fram till lösningen. Låt oss anta att vi börjar i $x = 0$ och att vi vet vad $y(0)$ är. Vi gör det genom att använda differentialkalkyl uttrycket $y(x + dx) = y(x) + y'(x)dx$. Hur? Ju, Vi använder faktum att vi jobbar med en differentialekvation: $y(x + dx) = y(x) + f(x)dx$. Vi vet att dx borde vara infinitesimal, men vi antar att det är ok att välja ett litet tal, låt oss säga att vi tar $dx = 0.1$. Vi använder den här algoritmen²:

steg	kommentar
$y(0)$	är känd, vi behöver inte räkna den, vi snarare använder den att kunna räkna vidare
$y(0.1) = y(0) + f(0) \cdot 0.1$	det är vi siktar på att räkna; Här tog vi $x = 0$ och $dx = 0.1$
$y(0.2) = y(0.1) + f(0.1) \cdot 0.1$	Här tog vi som referenspunkt $x = 0.1$ och $dx = 0.1$ som vanligt, men man kunde ha tagit en dx som är annorlunda.
$y(0.3) = y(0.2) + f(0.2) \cdot 0.1$	Referenspunkt: $x = 0.2$; $dx = 0.1$
$y(0.4) = y(0.3) + f(0.3) \cdot 0.1$	Referenspunkt: $x = 0.3$; $dx = 0.1$
$\vdots$	$\vdots$

Algoritmen kan implementeras ganska enkelt i en liten bit av kod

algoritmen i form av en kod som löser för första n steg
<pre>function solve_DE(y0, n, f, a, b, dx) // skriker ut lösningen till y'(x)=f(x) // begynnelsevillkor: y(a)=y0 // från x=a // till x=b local xref, yref, ynew, i xref = a yref = y0 for i = 1,n ynew = yref + f(xref)dx print(xref, yref) // vad var nytt blir nu gammalt // alltså, justera referenspunkten xref = xref + dx yref = ynew endfor print (xref, yref) return</pre>

6.4 Analytiska lösningar

De analytiska teknikerna som vi använder att lösa differentiella ekvationer är svårast att bemästra, dock det finns en ändlig mängd av de, så i princip är det inte "mission impossible". Det svåra är att identifiera den korrekta klassen som DE tillhör. När man har väl gjort det då är vägen fram ganska rak. Differentiella ekvationer och integraler har en ganska nära relation. Vi försöker ofta uttrycka lösningen till en DE i form av en integral, bestämd eller obestämd. Faktisk, i praktiken, vi brukar säga att vi "integrerar en differentialekvation" eller att vi har hittat en "integral av differentialekvation",

² I numerisk matematik algoritmen heter "Explicit Euler Algorithm".

då menar vi att vi har hittat en lösning till en differentialekvation. Nu kammar vi oss igenom olika klasser av differentiella ekvationer och visar hur man löser de. Vi börjar från de allra enklaste och bygger på med hänsyn till svårighetsgrad.

6.4.1 Separabla differentiella ekvationer av grad 1

Vi säger att en differentialekvation är separabel om den kan omvandlas till den här formen

$$a(y)dy = b(x)dx$$

Man löser sådana ekvationen på ett direkt sätt: integrera den vänstra och högra leden av ekvationen. Detta ger oss

$$\int a(y)dy = \int b(x)dx$$

Så, i princip, separabla ekvationer är enklaste att lösa för vi kan omvandla de direkt till form av en integral. Om vi kan lösa integraler analytisk då får vi en implicit funktion.

Exempel 1: Hitta lösningen till $xy' = y^2$ med begynnelsevillkor $y(e) = 2$. Först omvandlar vi DE till formen som ovan, så att vi kan integrera den. Vi omvandlar $xy' = y^2$ till $x \frac{dy}{dx} = y^2$ och knuffar allt som har med y att göra till den vänstra leden och allt som har med x att göra till den högra leden: $\frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{x}$. Nu är det bara att integrera den vänstra och den högra sidan som ger oss $\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{dx}{x}$. Löser vi integraler får vi $-\frac{1}{y} + c_1 = \ln x + c_2$. Man kan tycka att vi har två fria konstanter med det har vi inte. Vi kan skriva om ekvationen så det blir extra tydligt: $-\frac{1}{y} = \ln x + c_2 - c_1$. Om man väljer fritt c_1 och c_2 vad är det som vi väljer faktisk för problemet? Ju, vi väljer kombinationen $c_2 - c_1$. Har detta en oberoende betydelse. Nej, för vi kan likväl korta ner kombinationen och "döpa" den om till $c_3 = c_2 - c_1$. Lösningen till ekvationen är given i en implicit form $-\frac{1}{y} = \ln x + c_3$. Använder vi begynnelsevillkoret får vi $-\frac{1}{y(e)} = \ln e + c_3$ som ger oss $-\frac{1}{2} = 1 + c_3 \rightarrow c_3 = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$. Lösningen till den differentiella ekvationen är $-\frac{1}{y} = \ln x - \frac{3}{2}$ och vi vet att uttrycket definierar en implicit funktion. Ibland kan man omvandla den implicita formen till en explicit funktion igenom att lösa ekvationen för y analytisk. Det är bra att försöka göra så om det går. I det här fallet vi kan göra så men det kan man inte ta för givet: $\frac{1}{y} = \frac{3}{2} - \ln x \rightarrow y = \frac{1}{\frac{3}{2} - \ln x} \rightarrow y = \frac{2}{3 - 2\ln x}$.

6.4.2 H-L-grad 1-KK

Homogena linjära differentiella ekvationer av grad 1 med konstanta koefficienter kännetecknas av följande mallen:

$$ay'(x) + by(x) = 0$$

Här är det extremt viktig att a och b är konstanter. Vi löser ekvationen med att dela med a som leder till

$$y'(x) + \frac{b}{a}y(x) = 0$$

Nu kallar vi kombinationen $r = \frac{b}{a}$ och skriver

$$y'(x) + ry(x) = 0$$

Det finns två sätt att lösa den här ekvationen på.

Sätt 1: Den här differentiella ekvationen är faktisk separabel. Vi kan skriva om den till mallen som passar

$$y' = -r \cdot y \rightarrow dy = -r \cdot y \cdot dx \rightarrow \frac{dy}{y} = -r \cdot dx$$

och då är det bara att integrera

$$\int \frac{dy}{y} = \int (-r) dx$$

som ger oss

$$\ln |y| = -rx + c$$

Tillämpar vi $\exp()$ till den vänstra och den högra leden som $\exp(VL = HL)$ då får vi

$$|y| = e^{-rx+c} = e^c e^{-rx}$$

Vi ser från ekvationen ovan att vi har två klasser av lösningar

$$y_1(x) = +e^c e^{-rx}$$

$$y_2(x) = -e^c e^{-rx}$$

Hur skall vi välja? Ju, det beror på begynnelsevillkoret för problemet. Vi har inte diskuterat begynnelsevillkor med flyt. Nu kommer ni att förstå varför.

Exempel BV1: Låt oss anta att begynnelsevillkoret är $y(0) = +3$. Vi ser att vi måste välja $y_1(x)$ som lösning, annars kan vi aldrig tillfredsställa begynnelsevillkoret. Hade vi valt fel, då skulle vi ställas framför problemet att hittat ett c sådan att följande är sant

$$+3 = -e^c e^{-r \cdot 0} \rightarrow +3 = -e^c \rightarrow -3 = e^c \rightarrow c = \ln(-3)$$

och vi ser att det inte går att hitta ett c ; vi kan inte räkna $\ln(-3)$. Men, om vi väljer rätt, alltså vi väljer $y_1(x)$, då insättning av begynnelsevillkoret ger

$$+3 = +e^c e^{r \cdot 0} \rightarrow +3 = +e^c \rightarrow 3 = e^c \rightarrow c = \ln 3$$

Lösningen är

$$y(x) = y_1(x)|_{c=\ln 3} = e^{\ln 3} e^{-rx} = 3e^{-rx}$$

Exempel BV2: Låt oss anta att begynnelsevillkoret är $y(0) = -3$. Vi ser att vi måste välja $y(x) = y_2(x)$ som lösning.

$$-3 = y(0) \rightarrow -3 = y_2(0) \rightarrow -3 = -e^c e^{-r \cdot 0} \rightarrow -3 = -e^c \rightarrow 3 = e^c \rightarrow c = \ln 3$$

Med $y(x) = y_1(x)$ kan vi aldrig tillfredsställa begynnelsevillkoret:

$$-3 = y(0) \rightarrow -3 = y_1(0) \rightarrow -3 = +e^c e^{r \cdot 0} \rightarrow -3 = e^c \rightarrow c = \ln(-3)$$

Lösningen är

$$y(x) = y_2(x)|_{c=\ln 3} = -e^{\ln 3} e^{-rx} = -3e^{-rx}$$

Exempel ovan visar att vi kan skriva den allmänna lösningen som

$$y(x) = Ae^{-rx}$$

där A är en fri konstant som kan vara bägge positiv eller negativ. Vad hände här är att vi har parametriserat den fria konstanten som

$$A = \begin{cases} +e^c \\ -e^c \end{cases}$$

På det här sättet har vi bara ett enda uttryck att jobba med (istället för två).

Sätt 2: Vi kan gissa lösningen. Anta att $y(x) = Ae^{qx}$. Räknar vi derivatan får vi $y'(x) = qAe^{qx}$. Insättning i den differentiella ekvationen ger

$$y'(x) + r \cdot y(x) = 0 \rightarrow qAe^{qx} + rAe^{qx} = 0 \rightarrow (q + r)Ae^{qx} = 0$$

Det här är intressant. Vi har visat att villkoret för att $y(x) = Ae^{qx}$ är en lösning är

$$(q + r)Ae^{qx} = 0$$

och det borde vara så för varje x . Vi vet att e^{qx} kan aldrig bli 0. Nästa möjlighet är att $A = 0$. Men om vi antar det är så då får vi $y(x) = 0e^{qx} = 0$ och visst $y(x) = 0$ är en lösning till ekvationen men spännande är den inte. Den sista möjlighet är att kräva $q + r = 0$. Detta är mycket bättre och leder till en klass av lösningar i form $y(x) = Ae^{-rx}$.

Det finns ett problem med att gissa. Har vi hittat alla lösningar?
Det är någonting man måste noggrant om varje gång.

Just för det här problemet, med separationstekniken ovan vi har visat att den enda klass av lösningar är faktisk i form $y(x) = Ae^{-rx}$. **Separationstekniken plockar alla lösningar!** Alla möjliga lösningar är inbakade i grenar av lösningar till den ekvationen som definierar funktionen. Separationstekniken gav oss två klasser av lösningar men med ett klokt parametrisering kunde vi svetsa dessa två klasser till en enda klass.

6.4.3 IH-L-grad 1-KK

Icke-homogena linjära differentiella ekvationer av grad 1 med konstanta koefficienter kännetecknas av följande mallen:

$$ay'(x) + by(x) = \tilde{f}(x)$$

Här är det extremt viktig att a och b är konstanter. Vi löser ekvationen med att dela med a som vanligt

$$y'(x) + \frac{b}{a}y(x) = \frac{1}{a}\tilde{f}(x)$$

Nu kallar vi kombinationen $r = \frac{b}{a}$ och skriver

$$y'(x) + ry(x) = f(x)$$

Vi har döpt om kombinationen $\frac{1}{a}\tilde{f}(x)$ till $f(x)$. Tekniken att lösa icke-homogena ekvationer är alltid densamma. Vi delar lösningen i två delar, $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$, där vi använder den homogena lösningen $y_h(x)$ och den partikulära lösningen $y_p(x)$. Den homogena lösningen löser den homogena ekvationen

$$y'_h(x) + ry_h(x) = 0$$

och den partikulära lösningen löser

$$y_p'(x) + ry_p(x) = f(x)$$

Man kan ju tycka att problemet är lika svår som vi började med, men fördelen är att vilken som helst gissning av $y_p(x)$ duger.

Hur vet vi att $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ är lösningar? Det är bara att addera dessa två ekvationer använda additions formeln för derivator

$$y_h'(x) + ry_h(x) = 0$$

$$y_p'(x) + ry_p(x) = f(x)$$

$$y_h'(x) + y_p'(x) + ry_h(x) + ry_p(x) = 0 + f(x)$$

$$(y_h(x) + y_p(x))' + r(y_h(x) + y_p(x)) = f(x)$$

$$(y(x))' + r(y(x)) = f(x)$$

Exempel 1: $y'(x) + 2y(x) = 4$ med begynnelsevillkoret $y(0) = 6$. Lösningar till den homogena ekvationen är $y_h(x) = Ae^{-2x}$ där A är den fria konstanten. Vi försöker gissa den partikulära lösningen i formen $y_p(x) = ax + b$. Derivatans är $y_p'(x) = a \cdot 1 + 0$. Insättning i DE ger $a + 2(ax + b) = 4 \rightarrow 2ax + a + 2b = 4$. Vi vill att den sista ekvationen är sant för varje x . Då måste det vara så att $a = 0$ och $a + 2b = 4$ alltså $b = 2$ och $y_p(x) = 0 \cdot x + b = 2$. pusslar vi ihop allt får vi

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^{-2x} + 2$$

Notera att den partikulära lösningen har inga fria konstanter. Men den homogena lösningen har en fri konstant, A , och vi använder den för att fixa begynnelsevillkoret.

$$y(0) = 6 \rightarrow Ae^{-0} + 2 = 6 \rightarrow A + 2 = 6 \rightarrow A = 6 - 2 = 4$$

Nu vet vi att lösningen är

$$y(x) = 4e^{-2x} + 2$$

Hur vet vi att det inte finns flera lösningar? Det är en ganska komplicerad sats som garanterar oss, för just den här typen av DE, att om vi har hittat en lösning då vet vi att det finns ingen annan.

6.4.4 H-L-grad 1-IKK

Homogena linjära differentiella ekvationer av grad 1 med icke-konstanta koefficienter kännetecknas av följande mallen:

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$$

Där $a(x)$ och $b(x)$ är inte konstanter men funktioner av x . Om vi antar att a och b är konstant funktioner då får vi tillbaka det vi har redan tittat igenom. Vi löser ekvationen med att dela med $a(x)$ som vanligt som ger

$$y'(x) + p(x)y(x) = 0$$

där $p(x) = \frac{b(x)}{a(x)}$. Det här är en separabel ekvation som vi kan lösa med den vanliga tekniken efter omvandling

$$y'(x) = -p(x)y(x) \rightarrow \frac{dy}{y} = -p(x)dx \rightarrow \int \frac{dy}{y} = - \int p(x)dx$$

Integralen i den vänstra leden är ganska enkel

$$\int \frac{dy}{y} = \ln|y| + c$$

och integralen i den högra leden vi nämner om till

$$\mu(x) = \int p(x)dx$$

Lösningen kan skrivas i formen

$$\ln|y(x)| + c = -\mu(x) \rightarrow |y(x)|e^c = e^{-\mu(x)} \rightarrow |y(x)| = e^{-c}e^{-\mu(x)}$$

Vi ser att

$$y(x) = \pm e^{-c}e^{-\mu(x)}$$

Med parametrisering

$$A = \begin{cases} +e^c \\ -e^c \end{cases}$$

vi ser att vi kan skriva

$$y(x) = Ae^{-\mu(x)}$$

där konstanten A kan vara positiv eller negativ.

Exempel 1: $y'(x) + xy(x) = 0$ med villkor $y(0) = y_0$. Tillämpar vi receptet får vi $\mu(x) = \int x dx = \frac{x^2}{2} + \mu_0$ och lösningen blir $y(x) = Ae^{-\mu(x)} = Ae^{-\frac{x^2}{2} - \mu_0} = Ae^{-\mu_0}e^{-\frac{x^2}{2}}$. Vi ser att egentligen vi har bara en enda fri konstant $B = Ae^{-\mu_0}$. Vi får en hel klass av funktioner som lösningar $y(x) = Be^{-\frac{x^2}{2}}$ där man kan välja B fritt. Med randvillkoret blir det $y_0 = y(0) = Be^{-\frac{x^2}{2}}|_{x=0} = Be^{-0} = B$ och då får vi $y(x) = y_0e^{-\frac{x^2}{2}}$.

6.4.5 IH-L-grad 1-IKK

Icke-homogena linjära differentiella ekvationer av grad 1 med icke-konstanta koefficienter kännetecknas av följande mallen:

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x)$$

Där $a(x)$, och $b(x)$ är inte konstanter men funktioner av x . Om vi antar att a och b är konstant funktioner då får vi tillbaka det vi har redan tittat igenom. Vi löser ekvationen med att dela med $a(x)$ som vanligt som ger

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x)$$

där $p(x) = \frac{b(x)}{a(x)}$ och $q(x) = \frac{c(x)}{a(x)}$. Vi löser ekvationen med en speciell teknik. Vi antar ansatzen

$$y(x) = A(x)e^{-\mu(x)}$$

där som tidigare vi har $\mu(x) = \int p(x)dx$ eller $\mu'(x) = p(x)$. Insättning i DE ger

$$A'(x)e^{-\mu(x)} + \textcolor{green}{A(x)(-\mu'(x))e^{-\mu(x)}} + \textcolor{green}{p(x)A(x)e^{-\mu(x)}} = q(x)$$

Termer i grönt tar bort varandra och då har man

$$A'(x)e^{-\mu(x)} = q(x) \rightarrow A'(x) = e^{\mu(x)}q(x) \rightarrow A(x) = \int e^{\mu(x)}q(x)dx$$

Lösningen blir

$$y(x) = e^{-\mu(x)} \int e^{\mu(x)}q(x)dx$$

Notera att vi har två integraler. En integral som är explicit och en som definierar $\mu(x)$. Det verkar som att vi har två integrationskonstanter. Dock vi vet från den allmänna principen att en DE av grad n har lösningar med n fria konstanter.

Formellt man kan visa att konstanten i $\mu(x)$ försvinner om vi skriver om lösningen som en bestämd integral

$$y(x) = \int_{x_0}^x e^{\mu(u)-\mu(x)}q(u)du + y(x_0)e^{\mu(x_0)-\mu(x)}$$

Notera att det är bara kombinationer $\mu(\text{arg1}) - \mu(\text{arg2})$ som dyker upp.

Och allt bli bra under himmelen och jord. Nu när vi har tappat en integrationskonstant vet vi att vi kommer att ha en kvar. Den kommer från den resterande integralen.

Man kan härleda formeln ovan på följande sätt. Vi byter den ursprungliga integralen till bestämd form:

$$y(x) = e^{-\mu(x)} \left(\int_{x_0}^x e^{\mu(u)}q(u)du + c \right)$$

Vad är signifikansen av x_0 ? Om vi räknar $y(x_0)$ ser vi att

$$y(x_0) = e^{-\mu(x_0)} \left(\int_{x_0}^{x_0} e^{\mu(u)}q(u)du + c \right) = e^{-\mu(x_0)}(0 + c) = ce^{-\mu(x_0)}$$

och konstanten c bli

$$c = e^{\mu(x_0)}y(x_0)$$

Pusslar man allt ihop får vi

$$y(x) = e^{-\mu(x)} \left(\int_{x_0}^x e^{\mu(u)}q(u)du + e^{\mu(x_0)}y(x_0) \right)$$

och i sista steget

$$y(x) = \int_{x_0}^x e^{\mu(u)} e^{-\mu(x)} q(u) du + e^{\mu(x_0)} e^{-\mu(x)} y(x_0)$$

Om vi använder egenskapen av den exponentiella funktionen $\exp(\alpha + \beta) = \exp \alpha \exp \beta$ då får vi

$$y(x) = \int_{x_0}^x e^{\mu(u)-\mu(x)} q(u) du + y(x_0) e^{\mu(x_0)-\mu(x)}$$

Vi ser att x_0 beskriver randvillkoret för problemet för det är enkelt att visa att $y(x_0) = y_0$.

Exempel 1: $y'(x) + xy(x) = x$ med begynnelsevillkor $y(0) = y_0$. Från liknande tidigare exemplet vi vet att $\mu(x) = \frac{x^2}{2} + \mu_0$. Insättning i lösningen ger

$$y(x) = e^{-\left(\frac{x^2}{2} + \mu_0\right)} \int e^{+\left(\frac{x^2}{2} + \mu_0\right)} x dx \rightarrow y(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \int e^{+\frac{x^2}{2}} x dx$$

Notera att i det sista steget allt beroende på μ_0 försvann och det är alltid så som vi har visat tidigare, på grund av i formeln för den allmänna lösningen $\mu(x)$ dyker upp i kombinationen $e^{-\mu(x)} \dots e^{\mu(x)}$. Så vilken konstant som helst som man inkluderar i $\mu(x)$ kommer att försvinna.

Integralen är enkelt att räkna

$$\int e^{\frac{x^2}{2}} x dx = e^{\frac{x^2}{2}} + c$$

Den allmänna lösningen är

$$y(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \left(e^{\frac{x^2}{2}} + c \right) = 1 + ce^{-\frac{x^2}{2}}$$

och där finns konstanten c som kan hjälpa oss för att justera funktionen så att randvillkoret

stämmer. Randvillkoret $y_0 = y(0)$ ger oss $y_0 = \left(1 + ce^{-\frac{x^2}{2}} \right) \Big|_{x=0} = 1 + c \rightarrow c = 1 - y_0$ och nu vet vi att

$$y(x) = 1 + (1 - y_0)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Exempel 2: Vilka av dem här differentiella ekvationer tillhör klassen vi diskuterar? Argumentera för "ja" eller "nej". Om ni tror att svaret är "ja" identifiera $p(x)$ och $q(x)$.

(a) $x^2 y'(x) + x^4 y(x) = \sin x$. Svar: Den här DE tillhör klassen. Den är linjär. Den är av grad 1. Den har icke konstanta koefficienter. Den är icke homogen. För att se vad $p(x)$ och $q(x)$ är behöver vi omvandla ekvationen till en annan form där konstanten framför $y'(x)$ är 1. Vi kan åstadkomma detta med att dela hela ekvationen med x^2 : $\frac{x^2}{x^2} y'(x) + \frac{x^4}{x^2} y(x) = \frac{\sin x}{x^2} \rightarrow y'(x) + x^2 y(x) = \frac{\sin x}{x^2}$ och då ser vi att $p(x) = x^2$ och $q(x) = \frac{\sin x}{x^2}$.

(b) $3y''(x) + x^2 y'(x) + x^4 y(x) = \sin x$. Svar: ekvationen är av grad 2 och kan inte tillhöra klassen.

(c) $y(x)y'(x) + xy(x)^2 = y(x) \cos x$. Svar: Det verkar som att ekvationen är icke linjär, men vi försöker alltid omvandla ekvationen till det enklaste formen. Just i det här fallet kan vi dela hela

ekvationen med $y(x)$ som leder till $y'(x) + xy(x) = \cos x$ och vi ser att $p(x) = x$ och $q(x) = \cos x$. Alltså ekvationen tillhör vår klas.

(d) $y''(x) + x^2y'(x) + x^4y(x) = \sin x + (y'(x) + y(x))'$. Den här ekvationen verkar vara av grad 2 men det är den inte. Vi kan omvandla den till en annan form så att den passar vår klas: $y''(x) + x^2y'(x) + x^4y(x) = \sin x + y''(x) + y'(x)$. Fokusera på de termer som är färg kodade. Vi kan omgruppera dessa termer. Vi ser att $y''(x)$ försvinner helt och hållet. Termen $y'(x)$ som ligger i den högra ledet kan vi flytta till den vänstra sidan av ekvationen: $x^2y'(x) - y'(x) + x^4y(x) = \sin x \rightarrow (x^2-1)y'(x) + x^4y(x) = \sin x$. Nu ser vi att DE matchar mallen $a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = f(x)$ så den tillhör vår klas. För att identifiera vad $p(x)$ och $q(x)$ behöver vi som vanligt omvandla ekvationen så att funktionen framför $y'(x)$ blir 1, alltså att vi har den i formen $1 \cdot y'(x) + p(x) \cdot y(x) = q(x)$. Vi kan dela med $x^2 - 1$ för att åstadkomma detta. Då får vi: $\frac{x^2-1}{x^2-1}y'(x) + \frac{x^4}{x^2-1} \cdot y(x) = \frac{\sin x}{x^2-1} \rightarrow 1 \cdot y'(x) + \frac{x^4}{x^2-1} \cdot y(x) = \frac{\sin x}{x^2-1}$. Detta betyder att vi kan identifiera $p(x) = \frac{x^4}{x^2-1}$ och $q(x) = \frac{\sin x}{x^2-1}$.

6.4.6 H-L-grad 2-KK

Homogena linjära differentiella ekvationer av grad 2 med konstanta koefficienter kännetecknas av följande mall:

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

För att hitta lösningar använder vi ansatzen

$$y(x) = Ae^{rx}$$

Det är ganska enkelt att räkna derivator

$$y'(x) = rAe^{rx}$$

$$y''(x) = r^2Ae^{rx}$$

Isättning i mallen ger

$$ar^2Ae^{rx} + brAe^{rx} + Ae^{rx} = 0$$

och man kan faktorisera ganska mycket

$$(ar^2 + br + c)Ae^{rx} = 0$$

Notera att i ekvationen ovan vi vill att den högra leden är 0 för varje x . Hur kan vi åstadkomma detta? Till att börja med inser vi att e^{rx} kan aldrig vara noll. Nästa i tur och ordning är konstanten A . Visst vi kan välja $A = 0$ men då har vi ganska tråkig lösning $y(x) = 0$. Ingen idé att jubla för vi har bara visat att

$$a \cdot 0'' + b \cdot 0' + c \cdot 0 = 0$$

Som den sista möjligheten kan vi försöka välja ett r sådant att

$$ar^2 + br + c = 0$$

Polynomet $D(r) = ar^2 + br + c$ heter det karakteristiska polynomet och ekvationen $D(r) = 0$ heter den karakteristiska ekvationen.

Reella lösningar med $r_1 \neq r_2$: Anta att r_1 och r_2 är lösningar som är reella tal. Då vet vi att vi har hittat två lösningar:

$$y_1(x) = A_1 e^{r_1 x}$$

$$y_2(x) = A_2 e^{r_2 x}$$

Det är ganska enkelt att visa att om y_1 och y_2 är lösningar då är också $y_1 + y_2$ lösningar. Man gör det på samma sätt som vi har visat för IH-L-grad 1-KK klasen. Alltså lösningen vi letar efter har form

$$y(x) = A_1 e^{r_1 x} + A_2 e^{r_2 x}$$

och igenom att vi kan välja A_1 och A_2 fritt får vi en hel klas av lösningar. Hur bestämmer man konstanter A_1 och A_2 . De är fria fram tills någon säger vad begynnelsevillkoret för ekvationen är. Det är begynnelsevillkoret som styr vad konstanterna kommer att bli. Om vi vet att $y(0)$ och $y'(0)$ är, då kan vi reducera problemet till ett problem där vi behöver lösa två ekvationer med två okända variabler

$$y(0) = A_1 + A_2$$

$$y'(0) = r_1 A_1 + r_2 A_2$$

I den sista raden använde vi $y'(x) = (A_1 e^{r_1 x} + A_2 e^{r_2 x})' = (A_1 e^{r_1 x})' + (A_2 e^{r_2 x})' = A_1 (e^{r_1 x})' + A_2 (e^{r_2 x})' = A_1 e^{r_1 x} (r_1 x)' + A_2 e^{r_2 x} (r_2 x)' = A_1 e^{r_1 x} r_1 + A_2 e^{r_2 x} r_2$. Från linjär algebra ni vet hur man löser sådana ekvationer. Villkoret är att determinanten inte får vara noll:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{pmatrix} \neq 0$$

och ni vet från linjär algebra att determinanten är

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{pmatrix} = 1 \cdot r_2 - 1 \cdot r_1 = r_2 - r_1$$

och mycket sant om $r_1 \neq r_2$ som vi antar, då är vi säkra på att $r_2 - r_1 \neq 0$.

Reella lösningar med $r_1 = r_2$: Den här situationen är lite mera komplicerad. För att se vad är det som händer behöver vi introducera en elegant notation som kommer att ge oss överblick av problemet. Vi skriver om DE med hjälp av den karakteristiska polynom $D(r)$ och byter $r \rightarrow \frac{d}{dx}$. Då kan man introducera en operator

$$\hat{D} \equiv D \left(\frac{d}{dx} \right)$$

Varför? Vi såg tidigare att effekten av derivata är att plocka ner en extra faktor framför e^{rx} . Tex

$\frac{d}{dx} e^{rx} = r e^{rx}$ och på samma sätt $\left(\frac{d}{dx} \right)^2 e^{rx} = \left(\frac{d}{dx} \right) \left(\frac{d}{dx} \right) e^{rx} = \left(\frac{d}{dx} \right) (r e^{rx}) = r \left(\frac{d}{dx} \right) (e^{rx}) = r \cdot r \cdot e^{rx} = r^2 e^{rx}$. Om ni är osäkra kring det här sättet att beskriva DE se [18.5 Linear Differential Equations with Constant Coefficients > Constant-Coefficient Equations of Higher Order](#).

Så, det lönar sig att skriva om DE som

$$\hat{D}y(x) \equiv D \left(\frac{d}{dx} \right) y(x) = 0$$

där

$$D \left(\frac{d}{dx} \right) = a \left(\frac{d}{dx} \right)^2 + b \left(\frac{d}{dx} \right) + c$$

Om $r_1 = r_2 = r_0$ då vet vi att $D(r) = 0$ har en noll punkt av grad 2. Då vet vi att $D(r)$ kan skrivas som $D(r) = \alpha(r - r_0)^2$. Detta betyder att $D\left(\frac{d}{dx}\right)$ har liknande struktur

$$D\left(\frac{d}{dx}\right) = \alpha\left(\frac{d}{dx} - r_0\right)^2$$

Låt oss studera effekten av operatoren $\hat{D}_0 = \left(\frac{d}{dx} - r_0\right)$ om den tillämpas till $y(x) = u(x)e^{r_0x}$. Det är ganska enkelt att visa vad resultat blir

$$\begin{aligned}\hat{D}_0(u(x)e^{r_0x}) &= \left(\frac{d}{dx} - r_0\right)(u(x)e^{r_0x}) = \frac{d}{dx}(u(x)e^{r_0x}) - r_0(u(x)e^{r_0x}) \\ &= u'(x)e^{r_0x} + u(x)e^{r_0x}r_0 - r_0u(x)e^{r_0x}\end{aligned}$$

och vi ser att

$$\hat{D}_0(u(x)e^{r_0x}) = \dots = u'(x)e^{r_0x}$$

Tillämpar vi samma operator två gånger får vi

$$\hat{D}_0^2(u(x)e^{r_0x}) = \left(\frac{d}{dx} - r_0\right)\left(\frac{d}{dx} - r_0\right)(u(x)e^{r_0x}) = \left(\frac{d}{dx} - r_0\right)(u'(x)e^{r_0x}) = u''(x)e^{r_0x}$$

Nu ser vi att ekvationen

$$\hat{D}_0^2 y(x) = 0$$

med anstzen $y(x) = u(x)e^{r_0x}$ resulterar i villkoret

$$u''(x)e^{r_0x} = 0$$

Som vanligt, vi vet att $e^{r_0x} \neq 0$ då måste vi kräva att

$$u''(x) = 0$$

Den sista ekvationen har en enkel lösning, det måste vara ett polynom av grad 1:

$$u(x) = Ax + B$$

Om det karakteristiska polynomet har en nollpunkt av grad 2 då vet vi att lösningen är

$$y(x) = (Ax + B)e^{r_0x}$$

Reella lösningar med $r_1 \neq r_2$ återbesök: Notera en intressant sak. Om det karakteristiska polynomet har två noll punkter, varje av grad 1, låt oss kalla de för r_1 och r_2 , alltså vi vet att $D(r_1) = 0$ och $D(r_2) = 0$ då kan vi skriva DE som

$$\hat{D}_1 \hat{D}_2 y(x) = 0$$

där

$$\hat{D}_1 = \frac{d}{dx} - r_1$$

$$\hat{D}_2 = \frac{d}{dx} - r_2$$

Från uträkningen ovan vet vi att vi kan leta lösningar i form

$$y_1(x) = u_1(x)e^{r_1x}$$

$$y_2(x) = u_2(x)e^{r_2x}$$

och insättning i $\widehat{D}_1\widehat{D}_2y(x) = 0$ ger

$$\widehat{D}_1\widehat{D}_2y_1(x) = \widehat{D}_2\widehat{D}_1y_1(x) = \widehat{D}_2(\widehat{D}_1y_1(x)) = \widehat{D}_2(u_1'(x)e^{r_1x}) = 0$$

$$\widehat{D}_1\widehat{D}_2y_2(x) = \widehat{D}_1(u_2'(x)e^{r_2x}) = 0$$

För att $y_1(x)$ och $y_2(x)$ skall bli lösningar det räcker att $u_1'(x) = 0$ och $u_2'(x) = 0$ alltså $u_1(x)$ och $u_2(x)$ måste vara konstanta funktioner: $u_1(x) = A_1$ och $u_2(x) = A_2$, precis som vi har visat tidigare.

Komplexa lösningar $r = k \pm i\omega$. Vi vet att om ett polynom har en komplex rot i form $r_1 = k + i\omega$ då måste den också den andra roten $r_2 = k - i\omega$. Så rötter till det karakteristiska polynomet kommer i par och är ganska symmetriska. Vi vet att lösningen kan skrivas som

$$y(x) = A_1e^{(k+i\omega)x} + A_2e^{(k-i\omega)x}$$

Vi kan omvandla uttrycket med att faktorisera först vad faktoriseras kan

$$y(x) = e^{kx}(A_1e^{i\omega x} + A_2e^{-i\omega x})$$

och sedan använda Euler satsen

$$e^{\pm i\omega x} = \cos \omega x \pm i \sin \omega x$$

Då får vi

$$y(x) = e^{kx}[A_1(\cos \omega x + i \sin \omega x) + A_2(\cos \omega x - i \sin \omega x)]$$

som efter lite omgruppering av termer ger

$$y(x) = e^{kx}[(A_1 + A_2) \cos \omega x + i(A_1 - A_2) \sin \omega x]$$

Vi kan byta två konstanter A_1 och A_2 mot två nya konstanter B_1 och B_2 med hjälp av

$$A_1 + A_2 = B_1$$

$$i(A_1 - A_2) = B_2$$

Dock vi måste kolla att när vi sveper igenom alla möjliga val av A_1 och A_2 då kan vi faktisk producera alla möjliga kombinationer av B_1 och B_2 . Linjär algebra garanterar oss att så är fallet. Det är lätt att kolla att ekvation systemet ovan har determinant som är inte noll. Så lösningen blir

$$y(x) = e^{kx}[B_1 \cos \omega x + B_2 \sin \omega x]$$

där vi är säkra att B_1 och B_2 kan betraktas som fria konstanter.

6.4.7 IH-L-grad 2-KK

Icke-homogena linjära differentiella ekvationer av grad 2 med konstanta koefficienter kännetecknas av följande mall:

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)$$

Som vanligt, för varje linjär DE vi kan skriva lösningen som $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ där $y_h(x)$ är lösningen till den homogena DE

$$ay_h''(x) + by_h'(x) + cy_h(x) = 0$$

och $y_p(x)$ är en lösning vi har gissat till den ursprungliga DE

$$ay_p''(x) + by_p'(x) + cy_p(x) = f(x)$$

Vi vet från tidigare delen hur man hanterar den homogena ekvationen. Men hur gissar man $y_p(x)$?

Att gissa $y_p(x)$: Man försöker alltid använda samma mal som för $f(x)$. Det finns inga regler utöver recepten man har samlat över tiden. Här diskuterar jag några kända fall.

Om $f(x)$ är ett polynom. Om $f(x) = P_n(x)$ där $P_n(x)$ är ett polynom av grad n , då ofta försöker man med ett polynom av samma grad, $y_p(x) = Q_n(x)$ där $Q_n(x)$ är också ett polynom av grad n . Som ett exempel se [18.6 Nonhomogeneous Linear Equations > EX1](#). Väldigt sällan kan det hända att komplikationer förekommer så ADAMS skriver att man skall använda istället mallen $y_p(x) = x^m Q_n(x)$ där man väljer m som den minsta av 0, 1, eller 2, som vi väljer så att vi inte hamnar i "rymd" av homogena lösningar. Nämligen det kan hända att den homogena ekvationen har lösningen i form $Q_n(x)$ och då med $y_p(x)$ vill vi undvika upprepa det som redan finns den homogena delen $y_h(x)$. Men, det är ganska speciella fall, för vi vet att den homogena lösningen ofta har e^{rx} termer. Det måste vara så att konstanter a , b , och c konspirerar så att roten av det karakteristiska polynomet bli $r = 0$. Se också [18.6.1-2](#).

Om $f(x) = P_n(x)e^{qx}$. Försök med $y_p(x) = x^m Q_n(x)e^{qx}$. Man väljer m som vanligt. Chansen finns att den homogena ekvationen har lösningen i form $R_n(x)e^{rx}$ och då med $y_p(x)$ vill vi undvika upprepa det som redan finns den homogena delen $y_h(x)$. Problem kan vara att det kan vara så att $q = r$ av rena slumpen där q är givet och kommer från den högra sidan av DE, och r är roten till det karakteristiska polynomet alltså vi måste räkna fram den. Två goda problem att öva på är [18.6.3,7](#).

Vi diskuterar frågan [18.6.10](#) här i kompendiet för det är ett bra exempel på hur man behöver välja m .

10. $y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \sin x$

Om man räknar rötter av det karakteristiska polynomet (jag ber Mathematica göra det):

```
In[1]:= Solve[r^2 + 2 r + 2 == 0, r]
```

```
Out[1]:= {{r -> -1 - i}, {r -> -1 + i}}
```

då ser ni att den homogena lösningen är i form

$$y_h(x) = Ae^{-x} \sin x + Be^{-x} \cos x$$

Ni ser att till den vänstra sidan av likhetstecken står det term $e^{-x} \sin x$. Här har vi problemet att om vi antar $y_p(x) = Ce^{-x} \sin x$ när vi pussla ihop allt får vi $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^{-x} \sin x + Be^{-x} \cos x + Ce^{-x} \sin x = (A + C)e^{-x} \sin x + Be^{-x} \cos x$. Så ingenting speciellt har hänt, vi är fortfarande i "rymd" av homogena lösningar. Alltså $y_h(x) + y_p(x)$ liknar $y_h(x)$ det enda som händer är att vi bytte $A \rightarrow A + C$. Istället man borde försöka med $y_p(x) = Cxe^{-x} \sin x$. Testa och se om det fungerar bättre!

Om $f(x) = P_n(x)e^{qx} \cos(kx)$ eller $f(x) = P_n(x)e^{qx} \sin(kx)$. Försök med $y_p(x) = x^m e^{qx} (A_n(x) \cos(kx) + B_n(x) \sin(kx))$. Man väljer m som vanligt. Som ett exempel se [18.6 Nonhomogeneous Linear Equations > EX2](#). Se också på [18.6.9-10](#).

Att räkna $y_p(x)$: Metoden heter "variation of parameters" i ADAMS, se [18.6 Nonhomogeneous Linear Equations > Variation of Parameters](#). Ett bra exempel att träna på är [18.6.EX3](#).

6.4.8 L-grad 2-IKK

Linjära differentiella ekvationer av grad 2 med icke-konstanta koefficienter kännetecknas av följande mall:

$$a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = f(x)$$

där åtminstone en av funktionerna $a(x)$, $b(x)$, och $c(x)$ är inte konstant. I ADAMS detta diskuteras under [18.4 Differential Equations of Second Order > Second-Order Linear Equations](#).

Sådana ekvationer är ganska vanliga men vi kommer inte att diskutera de. Den vanligaste sättet att hitta lösningar till sådana ekvationer är att använda Taylorutveckling eller liknande. Vad är viktig för oss är struktur av lösningar. Om $f(x) = 0$ (homogen DE) det finns alltid två oberoende lösningar $y_1(x)$ och $y_2(x)$ och den homogena lösningen kan skrivas som $y_h(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$ där A och B är fria konstanter. Som vanligt, om $f(x) \neq 0$ då måste man gräva fram lösningen på något sätt och tekniker man använder ligger utanför grundläggande analys kurser. Funktioner som är lösningar till sådana ekvationer heter "speciella funktioner" och några exempel är Bessel funktioner - som ofta antecknas som $J_n(x)$, Henkel funktioner - $H_n(x)$, osv. I matematiken, som ni har märkt själva, för att hedra en person som har utvecklat teori kring ett matematiskt objekt, ofta "döper" man det matematiska objektet med namn av personen som bidrog till att förstå teori kring objektet. Som ett exempel, ekvationen som leder till Bessel funktioner är

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \nu^2)y(x) = 0$$

där ν är en konstant som beror på problemet. Om vi delar med x^2 då får vi formen som också används ofta i litteraturen

$$y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y(x) = 0$$

Det är inte så enkelt att hitta lösningen men vi vet att det borde vara två oberoende lösningar. Alltså DE ovan borde "föda" två speciella funktioner. Mycket sant, dessa två lösningar antecknas ofta som $J_\nu(x)$ och $Y_\nu(x)$. Inte så konstig, J_ν och Y_ν beter sig helt olika. Så lösningen är $y(x) = AJ_\nu(x) + BY_\nu(x)$.

6.4.9 L-höga grad-KK

När vi jobbar med linjära differentiella ekvationer av höga grad med konstanta koefficienter, försöker vi arbeta med de på samma sätt som med liknande ekvationer av grad 2. Problemet är att DE med höga grad leder till det karakteristiska polynomet av lika hög grad, och det blir svårt att hitta noll punkter analytisk. Men i princip samma metoder kan användas som vi har redan diskuterat. Se [18.4.EX1](#) och [18.4.EX2](#) för hur man gör om ni siktar på det högsta betyget.

