

Contents

1	W1 Gymnasiematte: påminnelse om saker vi behöver	2
2	W2 gränsvärdet, kontinuitet, och derivata grunder	2
3	W3 Derivata tillämpningar: att skatta små skillnader.....	2
4	W4 integraler: grunder och tekniker	2
5	W5 integraler: tillämpningar - längder, ytor, och volymer	2
6	W6 differentiella ekvationer som modellerings verktyg	2
7	W7 Praktiska tillämpningar av matematisk analys	2
7.1	Tillämpningar av matematisk analys till praktiska problem	2
7.1.1	Att hitta nollpunkter numerisk: Newton Raphson Metoden.....	2
7.1.2	Rita grafer med hjälp av derivata.....	3
7.1.3	Optimerings kriterier.....	3
7.1.4	"Related rates"	3
7.2	Tentamen förberedande 1 – G nivå.....	6
7.2.1	(G1) Att kunna utföra algebra med komplexa tal	6
7.2.2	(G2) Att kunna omvandla till polärform och tillbaka	6
7.2.3	(G3) Att kunna hitta en sned asymptot	7
7.2.4	(G4) Att kunna räkna gränsvärdet.....	7
7.2.5	(G5) Att kunna avgöra om en funktion är kontinuerlig eller om den kan göras kontinuerlig.....	7
7.2.6	(G6) Att kunna utföra linjär approximation	8
7.2.7	(G7) Att kunna approximera funktioner med Taylor polynomet.....	8
7.2.8	(G8) Att kunna räkna explicita derivator av olika kombinationer av funktioner	8
7.2.9	(G9) Att kunna hitta implicit derivata	8
7.2.10	(G10) Att kunna räkna integraler analytisk med enkla substitutioner	8
7.2.11	(G11) Att kunna räkna integraler med partiell integration.....	8
7.2.12	(G12) Att kunna använda differentialkalkyl och arbeta med dx och df	9
7.2.13	(G13) Att kunna lösa väldigt enkla differentiella ekvationer	9
7.3	Tentamen förberedande 2 – VG nivå.....	9
7.3.1	Att kunna arbeta med "related rates"	9
7.3.2	Att kunna beräkna längder, ytor, och volymer av komplicerade kroppar.....	9
7.3.3	Att kunna lösa medelsvåra differentiella ekvationer.....	9
7.3.4	Att kunna räkna medelsvåra integraler	9
7.3.5	Att kunna räkna svårare gränsvärdet.....	9
7.3.6	Medel komplicerade differentiella ekvationer: separationsteknik	9

7.4	Tentamen förberedande 2 – MVG nivån	10
-----	---	----

1 W1 Gymnasiematte: påminnelse om saker vi behöver

2 W2 gränsvärdet, kontinuitet, och derivata grunder

3 W3 Derivata tillämpningar: att skatta små skillnader

4 W4 integraler: grunder och tekniker

5 W5 integraler: tillämpningar - längder, ytor, och volymer

6 W6 differentiella ekvationer som modellerings verktyg

7 W7 Praktiska tillämpningar av matematisk analys

Det sista kapitlet av kompendiet har en speciell struktur som är viktig att alla känner till. Den sista veckan är menad delvis som ett appendix till materialet vi har redan diskuterat, där vi går igenom allt vi gick igenom en gång till, fast på ett mera reflekterande sätt. Men, den sista veckan är också reserverad som förberedelsen till den kommande tentamen. Vi kommer att gå igenom gamla tentamina, och diskutera möjliga ändringar för den kommande tentamen, med utsikt framåt så att ni har en tydlig uppfattning om vad är det som kommer på tentan.

7.1 Tillämpningar av matematisk analys till praktiska problem

Under den första lektionen kommer vi att diskutera några utvalda "gamla" ämnen, men vi kommer att titta på dessa med fräscha ögon. Idén är att vi går igenom en mängd praktiska problem som visar hur man använder tekniker och koncept vi har diskuterat i kursen, alltså hur man använder matematisk analys. Vi kommer att nudda vid en rad diverse problem. Här är listan:

7.1.1 Att hitta nollpunkter numerisk: Newton Raphson Metoden

En av de vanligaste metoder att hitta noll punkter. Det finns en geometrisk förklaring till hur metoden fungerar men vi kommer att försöka undvika att göra det. Som vanligt föredrar vi att tänka i termer av differential kalkyl först, och funderar kring den geometriska tolkningen sedan. Vad handlar problemet om? Anta att vi har en funktion $f(x)$ och försöker hitta en noll punkt. Vi också antar att vi inte kan göra det analytisk.

Anta att x_1 är en approximation till noll punkten. Vi antar att $f(x_1) \approx 0$ och vi skall försöka hitta en förbättring x_2 . Idén är ganska enkel. Vi använder x_1 som referens punkt, och mäter avståndet från den med Δx , alltså $x = x_1 + \Delta x$. Vi vill hitta ett x_* sådan att $f(x_*) = 0$. Vi skriver ekvationen som $f(x_1 + \Delta x_*) = 0$. I den här formen det bli ju lika svårt att hitta lösningen. Om $x_* = x_1 + \Delta x_*$, och om vi inte vet vad x_* är, då vet vi inte heller Δx_* . Men, vi kan använda differential kalkyl och skriva om $f(x_1 + \Delta x)$ så att det går att hitta Δx med en approximativ uträkning. Istället att kräva

$$0 = f(x_1 + \Delta x_*)$$

på grund att $f(x_1 + \Delta x) = f(x_1) + f'(x_1)\Delta x + O(\Delta x^2)$, kräver vi istället att

$$0 = f(x_1) + f'(x_1)\Delta x_*$$

alltså istället att använda $f(x)$ som vi kan inte jobba med, använder vi en approximation till $f(x)$. Här har vi valt att jobba med linjär approximation. Från ekvationen ovan får man

$$\Delta x_* = -\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Nu har vi förbättrat vår gissning för noll punkten x_* och kan skriva

$$x_* \approx x_2 = x_1 + \Delta x_* = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

och vi hoppas att x_2 ligger närmare x_* än x_1 gör, och ofta det blir så.

Exempel: Hitta med den här metoden en approximation till $\sqrt{2}$. Talet definieras med ekvationen $x^2 - 2 = 0$. Vi ser att för det här problemet vi behöver hitta en nollpunkt till $f(x) = x^2 - 2$.

Tillämpar man receptet får vi $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = x_1 - \frac{x_1^2 - 2}{2x_1} = x_1 - \frac{x_1^2}{2x_1} + \frac{2}{2x_1} = x_1 - \frac{x_1}{2} + \frac{1}{x_1} = \frac{x_1}{2} + \frac{1}{x_1}$. Vi startar processen med $x_1 = 1$. Den första gissningen blir $x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{1} = \frac{3}{2}$. Nu upprepar vi samma sak med den företrädde gissningen. Vi tar $x_1 = \frac{3}{2}$ och räknar ett nytt $x_2 = \frac{x_1}{2} + \frac{1}{x_1} = \frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{9+8}{12} = \frac{17}{12}$. Man ser att redan efter två iterationen får en hyfsat bra approximation till $\sqrt{2}$ för $\frac{17}{12} \approx 1.416666 \dots$.

7.1.2 Rita grafer med hjälp av derivata

Derivata kunskaper hjälper väldigt mycket när man behöver göra en skiss av grafen $y = f(x)$.

Den första derivatan: Om $f'(x) > 0$ över ett intervall då betyder det att funktionen måste växa i intervallet. På samma sätt om $f'(x) < 0$ över ett intervall då betyder det att funktionen minskar i intervallet.

Den andra derivatan: Om $f''(x) > 0$ över ett intervall då betyder det att funktionen har en för av en båge som böjer sig uppåt. På samma sätt om $f''(x) < 0$ över ett intervall då betyder det att funktionen böjer sig neråt över samma intervall. Punkten $f''(x) = 0$ är ganska speciellt och är lätt att känna igen i grafen (om den finns).

7.1.3 Optimerings kriterier

Om man letar efter maximum eller minimum av en funktion, då är det enklast att försöka hitta punkter där $f'(x) = 0$. I dessa punkter funktionen varken växer eller stiger. Varje sådan punkt har chans att bli en lokal minimum eller maximum. Sådana punkter heter kritiska punkter. Hur kollar vi om vi har lokalt minimum eller maximum? Det räcker med att räkna andra derivatan i samma punkt. Om $f''(x) > 0$ då har vi ett lokalt minimum, om $f''(x) < 0$ då har vi ett lokalt maximum.

Exempel: Analysera beteende av grafen $y = \sin x$ med hjälp av differential kalkyl. Intervaller i vilka $\sin x$ ökar, minskar, böjer sig uppåt eller neråt?

7.1.4 "Related rates"

Det finns en rad praktiska problem där flera variabler påverkar varandra, direkt eller indirekt. Ofta sambandet mellan två variabler är definierad i form

$$f(x_1, x_2) = 0$$

Som ett exempel, anta att x_1 och x_2 beskriver koordinater av en punkt som ligger på en cirkel med radie R som ändras inte i tid. Anta att punkten kan bara röra sig på cirkeln. Frågan är om vi ändrar x_1 en smula, säg vi ökar x_1 med 1%, med hur mycket kommer x_2 att öka i procent?

Och det är den typiska frågan man ställer: om vi ändrar en variabel i en smula, hur mycket andra variabler i problemet ändras. Detta kallas i ingenjörskonst för känslighetsanalys. ADAMS använder ganska tråkigt namn "related rates". Snacka om att prata om guldklump som ett sandgrus. Här följer några exempelproblem.

Flöde från en bassäng:

- 36. (Draining a pool)** A rectangular swimming pool is 8 m wide and 20 m long. (See Figure 4.7.) Its bottom is a sloping plane, the depth increasing from 1 m at the shallow end to 3 m at the deep end. Water is draining out of the pool at a rate of $1 \text{ m}^3/\text{min}$. How fast is the surface of the water falling when the depth of water at the deep end is (a) 2.5 m? (b) 1 m?

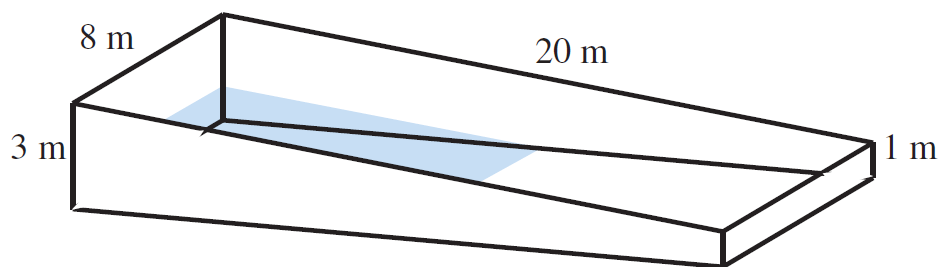


Figure 4.7

En steg som glider: Betrakta problemet från ADAMS:

- 18.** The top of a ladder 5 m long rests against a vertical wall. If the base of the ladder is being pulled away from the base of the wall at a rate of $1/3 \text{ m/s}$, how fast is the top of the ladder slipping down the wall when it is 3 m above the base of the wall?

Anta att positioner av kanter av stegen beskrivs med två längder $x(t)$ och $y(t)$ som mäter avståndet av stegens kant punkter från origo. Notera att dessa avstånd förändras över tid. Vi vet att stege har en viss längd L som är konstant i tid. Alltså, vi kan pussla allt information och skriva

$$L^2 = x(t)^2 + y(t)^2$$

Deriverar man bägge led av ekvationen får vi

$$0 = 2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t)$$

så att i varje tidpunkt t är det alltid sant att

$$x(t) \cdot x'(t) + y(t) \cdot y'(t) = 0$$

Från problemet vi vet att just i stunden vi betraktar stege är det så att $x' = \frac{1}{3} \text{ ms}^{-1}$, $L = 5 \text{ m}$, $y =$

3 m. Innan vi räknar hur mycket y' är, det är en bra idé att kolla att vi har förstått problemet korrekt,

alltså att det finns inga lösa tråd. Vad är viktig är att kolla att antal variabler och antal ekvationer/villkor är i balans.

Låt göra en kartläggning av ekvationer vi har tillgängliga i form av en lista

- ekvation 1: $x \cdot x' + y \cdot y' = 0$
- ekvation 2: $x^2 + y^2 = 25$
- ekvation 3: $x' = \frac{1}{3}$
- ekvation 4: $y = 3$

Låt oss göra samma sak med alla variabler vi har

- variabel 1: x
- variabel 2: y
- variabel 3: x'
- variabel 4: y'

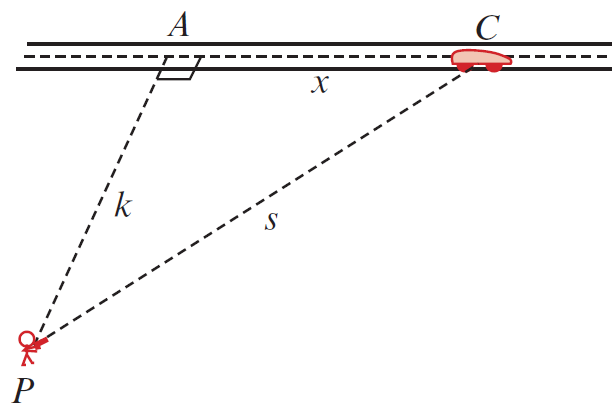
Alltså vi har fyra ekvationer med fyra variabler och vi borde kunna lösa ekvation systemet. Variablerna och ekvationerna är i perfekt balans!

Dynamiken av geometriska objekt som komprimeras eller stretchas ut:

- 6.** At a certain instant the length of a rectangle is 16 m and the width is 12 m. The width is increasing at 3 m/s. How fast is the length changing if the area of the rectangle is not changing?

En polis som mäter hastigheten men kan inte stå framför bilen:

- 16. (Radar guns)** A police officer is standing near a highway using a radar gun to catch speeders. (See Figure 4.6.) He aims the gun at a car that has just passed his position and, when the gun is pointing at an angle of 45° to the direction of the highway, notes that the distance between the car and the gun is increasing at a rate of 100 km/h. How fast is the car travelling?



7.2 Tentamen förberedande 1 – G nivå

Tentamenfrågor som tillhör den här kategorien delas i subkategorier där problemen i varje kategori kan lösas på samma sätt, mer eller mindre, med en känd mall. Sådana frågor testar följande typer av kunskaper:

- grundläggande förståelse av vad frågan handlar om;
- kännedom av metoden som tillhör kategorien, alltså som lämpar sig att lösa problemet;
- korrekt tillämpning av metoden.

Sådana frågor testar de grundläggande analyskunskaper och är ganska mekaniska, och kan beskrivas med en fokuserat begränsat antal lärande mål. Ett grundläggande lärande mål är: (G0) Att kunna utföra algebra med reella tal och arbeta med olika typer funktioner, tex att kunna definiera vad ett reellt tal är. (G0) examineras indirekt med en tolerans till slarvfel.

7.2.1 (G1) Att kunna utföra algebra med komplexa tal

- att kunna demonstrera de elementära algebraiska operationerna med komplexa tal som $z_1 \pm z_2$, $z_1 \cdot z_2$, z_1/z_2
- att kunna räkna potenser i^n med n heltal
- att kunna utföra division av två komplexa med *att förlänga med konjugat* metoden
- att kunna arbeta med Re och Im funktionerna

Exempel fråga: Vad är realdelen och imaginärdelen av z_1 ?

$$z_1 = \frac{(4 + i^{103})(2 - i^{27})}{2 + i + i^2}$$

7.2.2 (G2) Att kunna omvandla till polärform och tillbaka

- att kunna använda Euler formel

- att kunna expandera $e^{i\alpha}$ för positiv och negativ α
- att kunna tillämpa potens lagar av typ $(e^{i\alpha})^\beta$

Exempel fråga: Hur mycket är realdelen och imaginärdelen av z_2^{107} ?

$$z_2 = 2^{53} e^{-\frac{i\pi}{4}}$$

7.2.3 (G3) Att kunna hitta en sned asymptot

- att förklara den geometriska betydelse av en sned asymptot
- att förklara den formella metoden $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + m)]$
- att kunna avgöra vad k är för rationella funktioner
- att kunna räkna m
- att kunna avgöra om en sned asymptot finns eller inte

Exempel fråga: Bestäm konstanten a så att funktionen har en sned asymptot lika med $y = 3x + 5$.

$$f(x) = \frac{3x^2 + x + 1}{x - a}$$

7.2.4 (G4) Att kunna räkna gränsvärdet

- att räkna gränsvärdet med väl valda algebraiska omvandlingar
- att kunna räkna gränsvärdet med LH regler och att kunna avgöra i vilka situationer LH kan användas (eller inte)
- att kunna beskriva och tillämpa regler för hur man räknar gränsvärdet om den går att del i mindre bitar
- att beskriva olika gränsvärdet typer och känna igen densamma i praktiska tillämpningar

Exempel fråga: Går det att bestämma konstanten a så att gränsvärdet finns och är lika med 5? Om "ja" ange a och förklara hur du har valt den och beräkna gränsvärdet, om "nej" förklara varför det går inte att välja ett a .

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(a(x-1))}{x^2 - 1}$$

7.2.5 (G5) Att kunna avgöra om en funktion är kontinuerlig eller om den kan göras kontinuerlig

- att kunna beskriva vad kontinuiteten är
- att kunna avgöra om en funktion är kontinuerlig
- att kunna avgöra om en funktion som inte är kontinuerlig kan göras kontinuerlig
- att kunna kombinera kontinuerliga funktioner och kritisk avgöra om kombinationen blir också kontinuerlig

Exempel fråga: Vi betraktar en funktion $f: R \setminus \{1\} \rightarrow R$ definierad som

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^{108} + x^{63} - 2x}{x - 1} & x \neq 1 \\ c & x = 1 \end{cases}$$

Går det att definiera konstanten c så att funktionen $f(x)$ är kontinuerlig i R ? Ange villkoret för kontinuitet och visa tydligt hur du använder villkoret för att lösa problemet.

7.2.6 (G6) Att kunna utföra linjär approximation

- att kunna beskriva mallen/receptet
- att kunna tillämpa receptet
 - att kunna identifiera referenspunkten och förskjutningen
 - att kunna identifiera funktionen

Exempel fråga: Beräkna $f\left(1 + \frac{1}{10}\right)$ i linjär approximation (alltså utan att använda en räknare). Vad är den naturliga referenspunkten för problemet?

$$f(x) = e^{x-1} + \tan\left(\frac{x\pi}{4}\right)$$

7.2.7 (G7) Att kunna approximera funktioner med Taylor polynomet

- att kunna beskriva processen hur man räknar Taylor polynomet
- att kunna utföra processen
- att kunna beskriva karaktären av fel term

Exempel fråga: (se gamla tentor).

7.2.8 (G8) Att kunna räkna explicita derivator av olika kombinationer av funktioner

- att kunna räkna derivator av elementära funktioner: sinus, cosinus, potenser, osv
- att kunna härleda derivata formel för $\sqrt{x}$, $\arcsin x$, osv
- att kunna räkna derivator av algebraiska kombinationer av funktioner
- att kunna räkna derivator av sammansatta funktioner

Exempel fråga: Funktionen $f(x)$ är definierad som nedan. Beräkna $f'(x)$.

$$f(x) = \sqrt{\ln x} + x^2 e^{x+\ln x} + 2 \cos \sqrt{x}$$

7.2.9 (G9) Att kunna hitta implicit derivata

- att kunna beskriva processen
- att kunna tillämpa processen
- att kunna beskriva den grafiska betydelsen: tex att kunna hitta tangenten i en punkt av en graf som är definierad med implicit ekvation

Exempel fråga: Beräkna derivatan $\frac{dy}{dx}$ i punkten $x = 1$ och $y = 1$. Funktionen definieras som nedan. Använd implicit derivering.

$$2 + x \sin(\pi y) = x^2 + \cot\left(\frac{y\pi}{4}\right)$$

7.2.10 (G10) Att kunna räkna integraler analytisk med enkla substitutioner

- att kunna identifiera lämpliga substitutioner i form $u = ax + b$
- att kunna identifiera lämpliga substitutioner i form $u = ax^\alpha$
- för en angiven substitution att kunna testa om den fungerar eller inte
- att kunna räkna bestämda integraler (att ändra integrations gränser på rätt sätt)

Exempel fråga: Beräkna integralen (se gamla tentor).

7.2.11 (G11) Att kunna räkna integraler med partiell integration

- att kunna härleda formel för partiell integrering
- att kunna identifiera u och dv

- att tillämpa formeln på rätt sätt

Exempel fråga: (se gamla tentor).

7.2.12 (G12) Att kunna använda differentialkalkyl och arbeta med dx och df

- att kunna omvandla ett uttryck till former $A(x) + B(x)dx$
- att kunna identifiera typ av uttryck (TAS0 eller TAS1)
- att förklara vad TAS0 och TAS1 är
- att kunna förklara kopplingen mellan differentialkalkyl med linjär approximation

Exempel fråga: Omvandla alla uttryck med hjälp av differentialkalkyl, alltså skriv om till en form $A(x) + B(x) dx$. Notera att $A(x)$ och $B(x)$ kommer att variera från fall till fall. Ange också storleksordning för varje fall (TAS0 eller TAS1).

- $d(x^5) = ?$
- $(x + dx)^4 - x^4 = ?$
- $\ln(\sqrt{x + dx}) = ?$
- $(x + dx) \sin \frac{x+dx}{2} = ?$

7.2.13 (G13) Att kunna lösa väldigt enkla differentiella ekvationer

- att kunna identifiera klasen DE tillhör
- att kunna identifiera den rätta mallen för lösningen med rätt antal fria konstanter
- att kunna tillämpa begynnelsevillkor för att bestämma de fria konstanter
- att kunna kombinera den homogena och den partikulära lösningen på rätt sätt

Exempel fråga: Hitta lösningen till $y''(x) = \sin x$ med begynnelsevillkoren $y(0) = 1$ och $y'(0) = 2$.

7.3 Tentamen förberedande 2 – VG nivå

Sådana frågor är en smula extra komplicerade än deras kusiner från G-gruppen. Att lösa sådana problem kräver att man kan pussla ihop olika begrepp i en problemlösningsprocess. Alltså det handlar om att kombinera lösnings mallar från gupp G. Precis som grupp G sådana frågor kan beskrivas med flera lärande mål.

7.3.1 Att kunna arbeta med "related rates"

7.3.2 Att kunna beräkna längder, ytor, och volymer av komplicerade kroppar

7.3.3 Att kunna lösa medelsvåra differentiella ekvationer

7.3.4 Att kunna räkna medelsvåra integraler

- att kunna räkna integraler av rationella funktioner
- att beroende på problemet specificera rätt mall för partiell bråkuppdelning
- att kunna tillämpa integraltabeller på rätt sätt
- att kunna utföra enklare trigonometriska substitutioner
- att kunna utföra enklare hyperboliska substitutioner

7.3.5 Att kunna räkna svårare gränsvärdet

att kunna räkna gränsvärden som kräver upprepade tillämpningar av LH regel och kontroll av villkor

7.3.6 Medel komplicerade differentiella ekvationer: separationsteknik

7.4 Tentamen förberedande 2 – MVG nivå

Frågor i den här gruppen är förstås svåraste. Dels är de svåra för de utmanar studenter med visa tekniska utmaningar. Men det är inte allt. Sådana frågor är konceptuellt svårare. Det är inte alltid lätt att se vilka bitar behövs för att lösa problemet. Konceptuellt är sådana frågor ganska svåra. Tex man kan ana vad frågan handlar om, dock om man kan inte gå ett steg vidare mot lösningen, då är man på G eller VG nivå i sin förståelse. Lösningar till sådana frågor kräver att man gräver sig fram igenom en rad olika steg som är inte uppenbara, men som man borde kunna snappa upp om man är "vältränad" för analys.