

Contents

1	W1 Gymnasiematte: påminnelse om saker vi behöver	1
2	W2 gränsvärdet, kontinuitet, och derivata grunder	1
3	W3 Derivata tillämpningar: att skatta små skillnader.....	1
4	W4 integraler: grunder och tekniker	1
4.1	Integral grunder: Riemannintegral idén	1
4.2	Egenskaper av integraler.....	3
4.3	Den matematiska analysens huvudsats.....	4
4.4	Medelvärdesatsen för integraler	5
4.5	Integrations tekniker: analytiska.....	6
4.6	Försök alltid nyttja symmetriegenskaper av funktionen ni integrerar	6
4.7	Integrations tekniker: numeriska.....	9

1 W1 Gymnasiematte: påminnelse om saker vi behöver

2 W2 gränsvärdet, kontinuitet, och derivata grunder

3 W3 Derivata tillämpningar: att skatta små skillnader

4 W4 integraler: grunder och tekniker

4.1 Integral grunder: Riemannintegral idén

Integraler förekommer i två former, **obestämda** och **bestämda**. Obestämda integraler har vi pratat om tidigare när vi har använt $\int f(x)dx$ som en notation att markera att vi letar efter den primitiva funktionen till $f(x)$, alltså vi letar efter någonting, F , så att $F' = f(x)$. Visst, på ett formellt sätt så skriver man $F(x) = \int f(x)dx$ så att $F'(x) = f(x)$. Vi har redan pratat om det.

Den bestämda integralen har en behaglig geometrisk interpretation. Den dyker upp när vi försöker räkna ytan under grafen.

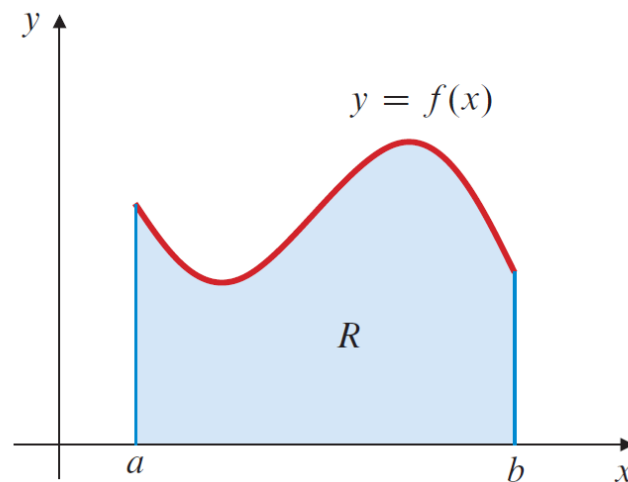


Figure 5.4 The basic area problem: find the area of region R

Ytan under grafen "antecknas" som

$$R = \int_a^b f(x) dx$$

Ja, det är inga konstigheter med notationen, jag har märkt att studenter har inga problem med den (inte på samma sätt som studenter brukar ha problem med differentialer). Men, en viktig fråga är vad menar vi med ytan under grafen egentligen? Problemet är att varje graf kan ha en fri form som böjer sig, går upp och ner, och kan göra ganska konstiga grejer. Vad händer om funktionen är riktig ruggig och liknar en fraktal (tex kustlinjen)? Det finns ganska exotiska funktioner för vilka det går inte att definiera ytan. Inte så konstig att i en vanlig analyskurs det brukar gå ganska mycket energi och tid åt att definiera begreppet "ytan" och sen visa när den finns. Men, vi kommer inte att orda så mycket om det. För funktioner som ni kommer att jobba med kan ni vara ganska säkra att det finns inga konstigheter och det naturliga sättet att tänka om ytan som ett gränsvärde kommer att bära er lång väg när ni jobbar praktisk med integraler. Detta uttrycks i följande satsen

If f is continuous on $[a, b]$, then f is integrable on $[a, b]$.

Och ni kommer att jobba för det mesta med kontinuerliga funktioner. Se

5.2 Areas as Limits of Sums > TH2

för diskussionen varför satsen håller. Några bra problem att träna på är [5.2.1](#) och [5.2.8](#). Diskussionen kring vad "ytan" under grafen kan betyda finns i

5.3 The definite integral

Texten i ADAMS som jag refererar till är ganska formellt och kan njutas av studenter som gillar det abstrakta. Några bra problem att öva på är [5.3.1](#), [5.3.4](#), [5.3.10](#), [5.3.11](#), och [5.3.15](#).

För er som är kanske lite mera praktisk lagda, skulle jag föreslå en förenkling. Vi skriver Riemannsumman

$$R(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n) = \sum_{x_i} f(x_i) \Delta x_i$$

och värdet beror på hur man har delat intervallet $[a, b]$. Det är alltid så att $b - a = \Delta x_1 + \dots + \Delta x_n$. I en enklare form med att byta $\Delta x_i \rightarrow \Delta x$

$$R(\Delta x) = \sum_{x_i} f(x_i) \Delta x$$

där vi antar att varje intervall vi har delat den stora ytan i är lika brett och då $b - a = n\Delta x$. Vi kommer tom att tappa index i och bara skriva

$$R(\Delta x) = \sum_x f(x) \Delta x$$

Så ytan vi är intresserad i kan räknas som gränsvärdet

$$R = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} R(\Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_x f(x) \Delta x$$

Notera att $\Delta x \rightarrow 0$ är samma som $n \rightarrow \infty$. Vi vet att när vi jobbar med differentialer, $\Delta x \rightarrow dx$, då kan vi tappa bort gränsvärdet tecken och skriver superkort

$$R = \sum_x f(x) dx$$

Ja, i sista steget är det bara att byta $\sum_x \blacksquare dx$ till $\int \blacksquare dx$ och jag har som vanligt mörknat ner det som inte är viktig för att ögat skall dras till saker som är viktiga. Visst, en matematiker skulle spy vid syn av ekvationen ovan, med det tjänar oss väl, för det blir ganska uppenbart hur man tänker.

4.2 Egenskaper av integraler

Egenskaper av Riemannintegral kommer från den geometriska tolkningen. Se

5.4 Properties of the Definite Integral

för varifrån de typiska integralegenskaper ni är vana vid kommer ifrån. Det viktigaste för oss är hur man hanterar konstanter och hur man delar integraler.

Den första är "städa konstanter" principen

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$$

Alltså det klokaste när man räknar integraler är att plocka konstanten framför integralen. Det här har praktisk betydelse när man räkna integraler numerisk, för man minskar antal operationer som måste utföras. Ser ni varför?

At dela integral betyder att man kan göra så här

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

och det är någonting som jag tror studenter redan kan. Egenskapen ovan är syskon med derivataregler för summa. Lättast att se att det är så är att derivera den högra och den vänstra sidan och för att kunna göra det måste man använda summa regeln. Att vi kan göra som ovan har också en praktisk betydelse när man räkna integraler numerisk, för man minskar antal operationer som måste utföras. Ser ni varför? Om inte, jag avslöjar inte nu, men visar senare när vi kommer att prata om numerisk integration.

Den tokigaste egenskapen för studenter att begripa sig på är den här:

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx = 0$$

Några problem att träna på finns i ADAMS: [5.4.1](#), [5.4.2](#), [5.4.3](#), [5.4.6](#), [5.4.7](#), [5.4.17](#).

4.3 Den matematiska analysens huvudsats

Den matematiska analysens huvudsats, om ni har problem att komma ihåg, kan härledas med hjälp av följande minnesteknik (alltså en "smutsig" bevis). Vi betraktar utan under en graf där den högra kanten är rörlig

$$R(x) = \int_a^x f(u)du$$

Alltså istället av intervall $[a, b]$ vi jobbar med intervaller i form $[a, x]$. Vi vill räkna

$$R(x + dx) - R(x) = ?$$

och om vi lyckas då kommer vi att klura ur vad derivatan av en integral är (med hänsyn till integrations gränsen). Det går att göra i några korta steg

$$\int_a^{x+dx} f(u)du = \sum_{u=a}^{u=x+dx} f(u)du = \sum_{u=a}^{u=x} f(u)du + f(x)dx = \int_a^x f(u)du + f(x)dx$$

Ekvationen ovan kan omvandlas till

$$\int_a^{x+dx} f(u)du - \int_a^x f(u)du = f(x)dx$$

och delar man ekvationen med dx får vi

$$\frac{d(\int_a^x f(u)du)}{dx} = f(x)$$

som är den matematiska analysens huvudsats:

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

$$F(x) = \int_a^x f(u) du$$

Wow! Nästa steg är att visa att

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \equiv F(x)|_a^b$$

Se ADAMS

5.5 The Fundamental Theorem of Calculus > TH5

för detaljerad diskussion hur man härleder satsen. Några relevanta problem att gå igenom är 5.5.1, 5.5.3, 5.5.5, 5.5.4, 5.5.9, 5.5.11, 5.5.13, 5.5.49, 5.5.39, 5.5.40, 5.5.41, 5.5.42, 5.5.47 (tips: räkna derivatan av höger och vänster sidan).

4.4 Medelvärdesatsen för integraler

Ett syskon till den matematiska analysens huvudsats är medelvärde satsen för integraler

The Mean-Value Theorem for integrals

If f is continuous on $[a, b]$, then there exists a point c in $[a, b]$ such that

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) f(c).$$

För beviset av medelvärdesatsen för integraler se

5.4 Properties of the Definite Integral > A Mean-Value Theorem for Integrals

Nu hör jag er tänka: (a) Varför är de syskonet? De kan inte ha samma mor eller far. (b) Vad har uttrycket ovan med medelvärde att göra? (a) Man behöver medelvärde satsen för integraler för att bevisa analysens huvudsats. Man kan säga att medelvärdesatsen är det äldre syskonet. 😊 (b) Hur kan vi definiera ett medelvärde av en funktion? Det går att visa, algebraisk, att medelvärdet av en funktion $f(x)$ över intervallet är faktisk

$$\bar{f} = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a}$$

Så när vi har väl hittat ett c från medelvärdesatsen då vet vi att $f(c)$ förstår medelvärde. Men, istället att hålla på med algebra, det är enklare att se detta intuitivt. Här kommer en bra bild från ADAMS:

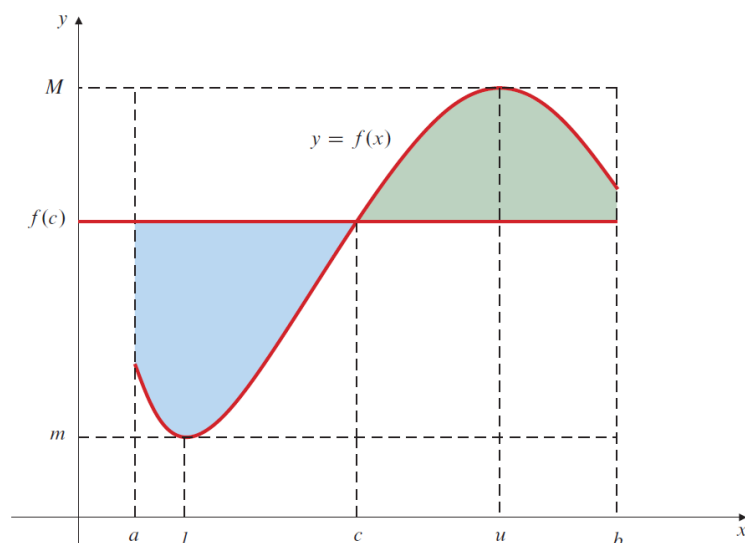


Figure 5.19 Half of the area between $y = f(x)$ and the horizontal line $y = f(c)$ lies above the line, and the other half lies below the line

4.5 Integrations tekniker: analytiska

Strategi: använd analysens huvudsats (relation mellan integral och primitiv funktion). För att räkna integraler analytisk innebär att man försöker använda analysens huvudsats. Lyckas vi hitta den primitiva funktionen då blir det enkelt att räkna ytan. Så, om man försöker analytisk betoning ligger på att försöka hitta den primitiva funktionen och vi kommer att diskutera flera tekniker.

Tekniker för att hitta den primitiva funktionen: Teknikerna kan fördelas grovt sett i tre grupper: Grupp1: att gissa; Grupp 2: om man kan gissa en del av integralen använd partiell integration; Grupp 3: substitutionstekniker. ADAMS förklarar dessa tekniker ganska bra så vi kommer inte att skriva om detta här. Det är bara att läsa igenom följande så ni kommer att klara er fint:

AD/5.5 The fundamental theorem of calculus

AD/5.6 The method of substitution

AD/6.1 Integration by parts

AD/6.2 Integrals of rational functions

AD/6.3 inverse substitutions

Några bra problem att öva integrations tekniker på finns i Tabellen nedanför.

ämne	att träna på
partiell integration	6.1.1, 6.1.2, 6.1.5, 6.1.31, 6.1.32
rationella funktioner	6.2.12, 6.2.22
substitutions tekniker	6.3.1, 6.3.3, 6.3.9, 6.3.16, 6.3.24

4.6 Försök alltid nyttja symmetriegenskaper av funktionen ni integrerar

Ibland kan man räkna en bestämd integral med bara att analysera symmetriegenskaper av en funktion, om integrations intervall är symmetrisk. Som ett exempel betrakta följande exempel.

Visa av integraler är 0 och visa inte. Identifiera vilka är noll utan räkna. Det går att argumentera utan att räkna integraler eller att rita grafer.

(a) $I_a = \int_{-1}^1 x^2 \sin x \, dx$

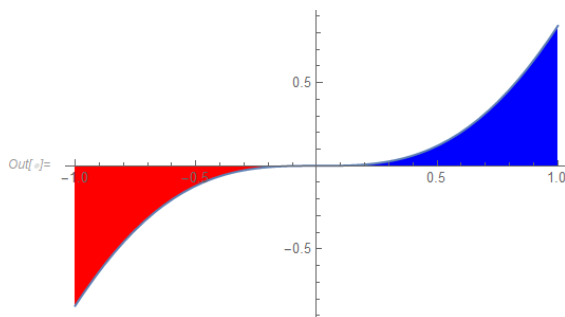
(b) $I_b = \int_{-1}^1 x \sin x \, dx$

(c) $I_c = \int_{-1}^1 |x| e^{|x|} \, dx$

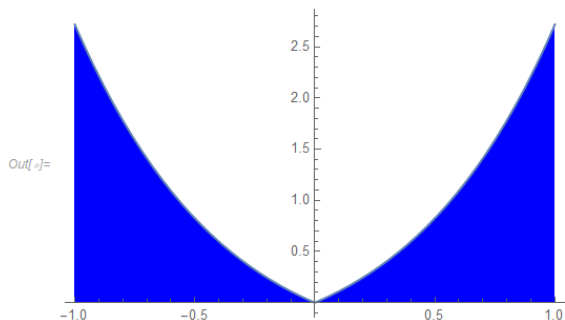
(d) $I_d = \int_{-1}^1 x e^{|x|} \, dx$

Låt oss rita grafer.

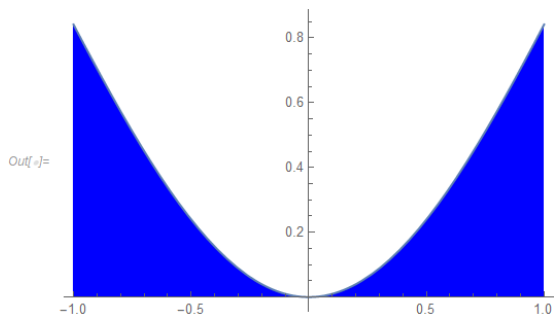
```
In[*]:= plot[x^2 Sin[x]]
```



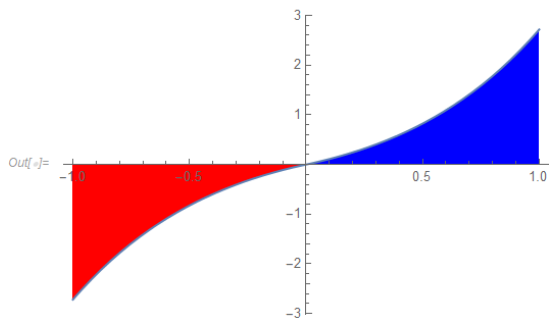
```
In[*]:= plot[Abs[x] Exp[Abs[x]]]
```



```
In[*]:= plot[x Sin[x]]
```



```
In[*]:= plot[x Exp[Abs[x]]]
```



Vi ser att $I_a = 0$ för att funktionen är lika mycket positiv som negativ så den röda ytan balanserar perfekt den blåa ytan. Samma gäller för I_d . Integralerna I_b och I_c är inte noll. Alltså vi borde kunna visa att $I_a = I_a^{(1)} - I_a^{(2)}$ där $I_a^{(1)} = I_a^{(2)}$, och exakt densamma för den sista integralen, $I_d = I_d^{(1)} - I_d^{(2)}$ med $I_d^{(1)} = I_d^{(2)}$. Låt os visa det.

Vi börjar med att dela integralen i två delar

$$I_a = \int_{-1}^1 x^2 \sin x \, dx = \int_0^1 x^2 \sin x \, dx + \int_{-1}^0 x^2 \sin x \, dx$$

nu gör vi variabel byte i den sista integralen med $x = -u$ och $dx = -du$. Med bytet den andra integralen kan omvandlas till

$$\int_{-1}^0 x^2 \sin x \, dx = \int_{-(-1)}^{-0} (-u)^2 \sin(-u) (-) du = \int_1^0 (u)^2 (-) \sin(u) (-) du = \int_1^0 u^2 \sin u \, du$$

Vi kan ändra riktningen av integration från "1 till 0" och byta till "0 till 1" och vara försiktiga med att justera med ett extra minustecken

$$\int_{-1}^0 x^2 \sin x \, dx = \int_1^0 u^2 \sin u \, du = - \int_0^1 u^2 \sin u \, du$$

Vi ser att

$$I_a = \int_{-1}^1 x^2 \sin x \, dx = \int_0^1 x^2 \sin x \, dx + \int_{-1}^0 x^2 \sin x \, dx = \int_0^1 x^2 \sin x \, dx - \int_0^1 u^2 \sin u \, du$$

Nu har vi visat att $I_a = I_a^{(1)} - I_a^{(2)}$ med

$$I_a^{(1)} = \int_0^1 x^2 \sin x \, dx$$

$$I_a^{(2)} = \int_0^1 u^2 \sin u \, du$$

Hur vet vi att $I_a^{(1)} = I_a^{(2)}$ är sant? Vi kan alltid byta namn på integrations variabel om att döpa om u till x . Då har vi visat att $I_a = I_a^{(1)} - I_a^{(2)} = \int_0^1 x^2 \sin x \, dx - \int_0^1 x^2 \sin x \, dx = 0$. Man kan göra samma uträkning för I_d .

Låt oss vissa att samma resultat kommer att hålla för vilken funktion som helst, om funktionen vi integrerar har den här egenskapen

$$f(-u) = -f(u)$$

och integrations intervall är symmetrisk kring 0, alltså vi integrerar i intervallet $[-a, a]$ där $a > 0$. Det är bara att härma uträkningen ovan. Vi börjar med att dela integralen i två delar

$$I = \int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a f(x) dx + \int_{-a}^0 f(x) dx$$

Nu, som tidigare, gör vi variabel byte i den sista integralen med $x = -u$ och $dx = -du$:

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_{-(-a)}^{-0} f(-u) (-) du = \int_a^0 (-) f(u) (-) du = \int_a^0 f(u) du$$

Igen, vi kan ändra riktningen av integration från " a till 0" och byta till "0 till a " och vara försiktiga med att justera med ett extra minustecken

$$\int_{-a}^0 f(x)dx = \int_a^0 f(u)du = - \int_0^a f(u)du$$

Vi ser att

$$I = \int_{-a}^a f(u)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_{-a}^0 f(x)dx = \int_0^a f(x)dx - \int_0^a f(u)du$$

och $I = 0$ på grund av att $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(u)du$.

4.7 Integrations tekniker: numeriska

Numeriska integrations tekniker "föds" från Riemann idén: man fördelar den stora ytan i mindre ytor genom att dela hela integrations intervallet $[a, b]$ i många mindre intervaller, ju flera desto bättre. Ofta man använder intervaller som har exakt samma brädd h . **Konstanten h är exakt densamma som den kända Δx vi har pratat om tidigare!** Vi säger att integrations intervallet har delats i n delar, alltså $b - a = nh$, och man vill helst ha n så stor som möjligt. Det är så alla numeriska integrations tekniker börjar. De skiljer sig i sättet man försöker approximera funktionen i varje liten intervall. Vad bli en bra approximation i den här kontexten? Det finns två villkor. (i) Det borde bli någonting som beskriver funktionen i intervaller så bra som möjligt, (ii) men det borde vara någonting som man kan räkna ytan av.

I kort, vad händer är följande. Vi antar att som vanligt vi har en partition med $n + 1$ punkter i form

$$P_n = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$$

och det betyder att $x_i = a + ih$ med $h = \frac{b-a}{n}$ och $i = 0, 1, 2, \dots, n-1, n$. Notera att vi har $n + 1$ punkter men vi har n intervaller. Det är ingenting konstigt. Rita bara några enkla exempel med $n = 4$ eller $n = 5$ och då ser ni varför det stämmer. Det är viktigt att kolla att det här numreringens sättet är konsistent, att $i = 0$ verkligen motsvarar a och att $i = n$ pekar på b . Låt oss kolla den vänstra kanten först: $x_0 = a + 0h = a$. Så allt är ok där. Den högra kanten: $x_n = a + nh = a + n \frac{b-a}{n} = a + (b - a) = b$ och det blir bra också. Nu använder vi partitionen. Hur? Se på...

Vi kan inte inspektera en kontinuerlig funktion i oändligt antal punkter. Vad vi gör istället är att vi gör en "sampling" eller stickprov på svenska. Vi plockar funktions värden från ett begränsat antal punkter och försöker räkna integralen utifrån denna information. Vilka punkter? Visst, vi plockar punkter från partitionen ovan. Låt oss definiera den begränsade värdemängden med V_n

$$V_n = \{f(x_0), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}$$

Varje numerisk integrations teknik går på att konstruera en algoritm A som tar en partition som input, $A(P_n)$, och som producerar en approximation för integral:

$$\int_a^b f(x)dx \approx A(P_n)$$

En typisk algoritm ser ut så här

En typisk implementering av numerisk integration
<pre> real function compute_integral(function f, Array xs, string type) // f - funktionen vi integrerar // xs - partitionen med punkter // type - typ av integral // // först utvärdera f för alla punkter i partitionen double fs = Array() n = Length(fs) for (i = 0...n) fs(i) = f(xs[i]) endfor // //använd den utvalda integrationsmetoden ...//som vanlig, klagga om användaren försöker använda //metoden som vi inte har implementerat if(type = "TRAPEZ") then result = Trapez(fs) else if (type = "SIMPSON") then result = Simpson(fs) else Abort("compute_integral-E: unknown integration method") endif return result end function </pre>

Notera att när vi vet funktionsvärden för partitionen, det är den enda informationen vi behöver. För att korta ner notationen kommer vi att skriva A_n istället för $A(P_n)$. Vi kommer att diskutera två algoritmer: Trapezregel ($A = T$) och Simpsonregel ($A = S$);

$$\int_a^b f(x)dx \approx T_n$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_n$$

Trapezregel: varifrån kommer den? Trapez regel kommer från att man approximerar funktionen med en rak linje. Det geometriska objektet som beskriver den lilla ytan är Trapez.

6.6 The trapezoid and midpoint rules

Trapez har två vertikala sidor. Detta betyder att i varje intervall $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ approximerar vi funktionen med den raka linjen som går igenom punkter $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ och $(x_i, f(x_i))$. Tex för $I_1 = [x_0, x_1]$ har vi punkter (x_0, y_0) och (x_1, y_1) med $y_0 = f(x_0)$ och $y_1 = f(x_1)$, och lika dan för alla andra punkter. Låt oss anta att vi har räknat ytan av trapezen. Vi refererar till ytan för I_1 som vi har

räknat på det här sättet som $T(I_1)$. Det är ganska enkel gymnasiet matematik som leder till (kolla i ADAMS 6.6.FIG-6-16 om ni är osäkra)

$$T(I_1) = \frac{h}{2}(x_0 + x_1)$$

Hela ytan under grafen räknas med att pussla ihop alla bidrag från alla intervaller

$$\int_{x_0=a}^{x_n=b} f(x)dx \approx T(I_1) + T(I_2) + \dots + T(I_n) = \sum_{i=1}^n T(I_i)$$

Notera att vi har n termer i summan. Man kunde implementera Trapez regel som ovan, vi kan räkna alla $T(I_i) = \frac{h}{2}(x_{i-1} + x_i)$ först och sedan summerar alla bidrag. Dock det lönar sig att göra lite algebra först, och räkna summan för hand. Om man gör det får vi

$$\sum_{i=1}^n T(I_i) = h \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2} \right)$$

och detta är Trapez regel i 6.6.DEF3 i ADAMS. Kant punkter x_0 och x_n är speciella och har inte samma konstant som de inre punkter $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$.

Simpson regel: varifrån kommer den? Simpson regel får man igenom att approximera funktionen med en parabol. Man använder tre punkter, två i kanterna, och en prick i mitten, och drar en parabol igenom. Det är ganska enkelt att räkna ytan under en parabol. Notera att om man jämför med Trapez regel så är funktionen vi använder att approximera smidigare, den ofta följer den riktiga funktionen bättre än en vanligt rak linje.

6.7 Simpson's rule

Skillnaden från Trapezregeln är att vi behöver tre punkter för att utföra approximationen. Vad vi gör är att parar intervaller så att den minsta yta vi räknar spänner över två intervaller. Låt oss börja med att para ihop I_0 och I_1 . Då får vi tre punkter att jobba med: (x_0, y_1) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) . Det är väldigt viktig att ni studerar grafen i 6.7.FIG-6-23. Den korta uträkningen i boken ger en ganska enkel formel för ytan

$$S(I_0, I_1) = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Hela ytan under grafen räknas som vanligt, vi pusslar ihop alla bidrag, från alla intervaller som vi har parat ihop

$$\int_{x_0=a}^{x_n=b} f(x)dx \approx S(I_0, I_1) + S(I_2, I_3) + \dots + S(I_{n-3}, I_{n-2}) + S(I_{n-1}, I_n) = \sum_{k=1}^{n/2} S(I_{2k-1}, I_{2k})$$

Notera att i formeln ovan har vi en summa som har vara $n/2$ termer.

Vi kan bara tillämpa Simpson regel om vi har ett jämnt antal intervaller, eller udda antal punkter. Alltså vi kan bara tillämpa Simpson regel om vi har n som är jämnt tal!

Dock till slut, det blir samma antal punkter som algoritmen måste gräva sig igenom. Som för Trapez regel kan man med hjälp av lite algebra skriva om summan som

$$S_n \equiv \sum_{k=1}^{n/2} S(I_{2k-1}, I_{2k}) = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

och formeln ovan definierar Simpsons regel 6.7.DEF5 i boken. Vi noterar att den här regeln är mera komplicerad än Trapez regeln. Konstanter framför termer med jämn index är inte samma som termer med udda index. Som vanligt, kant punkter är speciella och har sina egna konstanter.

Vad betyder "kvadratur"? Det är ett viktigt begrepp inom numerisk matematik som rör hur man räkna integraler numerisk. Tyvärr säger ADAMS väldigt lite om det, så jag kommer att skriva några ord om det. En kvadratur är recept av formen

$$\int_{x_0=a}^{x_n=b} f(x)dx \approx w_0y_0 + w_1y_1 + w_2y_2 + \dots + w_{n-1}y_{n-1} + w_ny_n$$

Konstanter $w_0, w_1, w_2 \dots, w_n$ definierar kvadratur.

Övning: Trapez och Simpson regler är exempel av kvadratur. Som en liten övning, försök hitta formler som beskriver w_i för Trapez och Simpson regler.

Sätt 1 att utveckla kvadratur (ADMAS): Trapez och Simpson fungerar bra för de flesta funktioner men det finns fall där man måste ge upp och utveckla speciellt snickrad integrations teknik, som ofta heter kvadratur. Tex om man vill räkna sådana integraler

$$\int_0^a \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx$$

då fungerar varken Trapez eller Simpson regeln särskild bra. Problemet är att $\frac{1}{\sqrt{x}}$ är inte en "snäll" funktion och kan inte riktig approximeras varken med den raka linjen eller med en parabol. Ett sätt att hantera sådana integraler är med variabel byte. ADAMS har några jätte bra exempel på hur man kan hantera sådana problematiska funktioner som är inte kontinuerliga, men som vi kan räkna integralen av med hjälp av "improper integral" ansatsen: parametrisera det som är farlig och sedan räkna gränsvärdet. Kolla 6.8 Other Aspects of Approximate Integration, speciellt exempel 6.8.EX2 och 6.8.EX3.

Sätt 2 att utveckla kvadratur: Här kommer en teknik till som proffs använder. Den här specifik till kompendiet. Det är viktig att förstå tankesättet när man utvecklar en kvadratur formel. Man vill att formeln fungerar bra för en klass funktioner. Tom man försöker välja konstanter w_i så att kvadratur

formel blir exakt för just den klassen. Om vi tittar på exemplet ovan, vi vill välja konstanter $w_0, w_1, w_2, \dots, w_n$ sådana att¹

$$\int_0^a \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx \approx w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + \dots + w_n f(x_n)$$

blir exakt likhet om $f(x)$ tillhör en klass funktioner. Det naturliga är att anta att vi vill att ekvationen blir exakt om $f(x)$ är en linjer funktion i varje intervall av partitionen I_i . Alltså, rent praktisk, vad man hoppas på är att om $f(x)$ i integralen är en snäll funktion som kan approximeras med en rak linje över en litet intervall då kvadraturen kommer att ge ett hyfsat bra resultat.

Låt oss visa hur man gör. Vi antar (i Trapez regel andan) att det går att approximera $f(x)$ med en rak linje i varje liten intervall $[x_i, x_{i+1}]$ som $f(x) \approx k_i x + m_i$. Det är en gymnasimatematik problem att hitta k_i och m_i om man vet vad $f(x_i)$ och $f(x_{i+1})$ är. Sen, när man vet vad k_i och m_i är då är det bara att räkna analytisk

$$R_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{k_i x + m_i}{\sqrt{x}} dx$$

och det kan man göra utan problem, inte sant, det är bara att städa konstanter

$$R_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{k_i x + m_i}{\sqrt{x}} dx = k_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sqrt{x} dx + m_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

och räkna resterande enkla integraler

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} = \frac{2}{3} \left(x_{i+1}^{\frac{3}{2}} - x_i^{\frac{3}{2}} \right)$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} = 2 \left(x_{i+1}^{\frac{1}{2}} - x_i^{\frac{1}{2}} \right)$$

Då kan man räkna varje liten yta numerisk

$$R_i = \frac{2}{3} k_i \left(x_{i+1}^{\frac{3}{2}} - x_i^{\frac{3}{2}} \right) + 2 m_i \left(x_{i+1}^{\frac{1}{2}} - x_i^{\frac{1}{2}} \right)$$

Senare approximerar man integralen som en summa, som vi brukar göra

$$\int_0^a \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} R_i$$

Hur noggranna är integrationsregler? Det är en viktig fråga. När ni jobbar som ingenjörer är det viktig att ni kan välja rätt integrations metod. Då måste ni förstå hur ni kan avgöra om en metod är bra eller inte. Feluppskattning av en integrations teknik uttrycks på ett speciellt sätt som är viktig att ni kan. Man använder den stora O notationen. Tex noggrannheten av Trapez regel är $O(h^2)$ och noggrannheten av Simpson regel är $O(h^4)$. Detta uttrycks som två satser i ADAMS

¹ Notera att jag skriver inte $\int_0^a f(x) \approx w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + \dots + w_n f(x_n)$.

$$\int_a^b f(x)dx = T_n + O(h^2) \quad (6.6.TM4)$$

$$\int_a^b f(x)dx = S_n + O(h^4) \quad (6.7.TM5)$$

Man kan tycka att det är konstigt med potenser i h när vi uttrycker noggrannhet. Se i ADAMS varför är det så, alltså kolla igenom bevis för 6.6.TM4. Det finns ingen bevis is ADMAS för 6.7.TM5. Jag kommer att visa ett alternativt bevis för 6.6.TM4. För 6.7.TM5 vi kommer att diskutera grovt vad är det som händer.

Alternativ förklaring av satsen 6.6.TM4: ADAMS ger ett bevis av satsen med hjälp att partiell integration. Här i kompendiet vi visar ett annat mera intuitivt sätt att tänka. Låt oss betrakta det första intervallet först. Den grundläggande idén bakom Trapez regel är linjär interpolation. I intervallet approximerar vi funktionen med en linjär form $f(x) \approx g(x) = kx + m$ och vi vill att funktionen och approximationen matchar exakt i kanterna.

Vi anar intuitivt att skillnaden mellan funktionen och linjär approximation i intervallet $I_1 = [x_0, x_1]$ med $x_1 = x_0 + h$ borde kunna beskrivas som

$$f(x_0 + h) \sim g(x_0 + h) + \frac{1}{2}f''(c)h^2$$

där $c \in [x_0, x_0 + h]$. Ni kan undra varför skriver jag " $\sim$ " och inte " $=$ ". Ja, problemet är att $g(x)$ är inte Taylor polynom. Den är någonting annat, som i matematiken vi brukar referera till som "linjär interpolation".

Linjär interpolation: Idén bakom Taylor polynomet är att vi satsar allt krut på en punkt, matchar värdet och den första derivatan av funktionen. När man gör linjär interpolation siktar man på hela intervallet, och kräver att funktionen och approximationen matchar exakt i kanter. Skillnader finns sammanfattade i tabellen.

Villkor för approximationen	
Taylor upp till grad 1: $T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$	Linjär interpolation: $g(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$
$f(x_0) = T_1(x_0)$	$f(x_0) = g(x_0)$
$f'(x_0) = T_1'(x_0)$	$f(x_1) = g(x_1)$

Det finns en sats som säger följande om noggrannheten av linjär interpolation:

En super coolt sats som finns inte i ADAMS men är ganska enkel att bevisa: Om $g(x) = kx + m$ är den linjära interpolationen till $f(x)$ i intervallet $I_1 = [x_0, x_1]$ med villkor att $f(x_0) = g(x_0)$ och $f(x_1) = g(x_1)$, då är det sant att

$$g(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Resultatet ovan är en ganska enkel gymnasiet matematik problem. Vad är intressant är att det finns ett $\xi \in [x_0, x_1]$ (t.o.m. kanske flera) så att

$$f(x) = g(x) + \frac{1}{2!}f''(\xi)(x - x_0)(x - x_1)$$

Bevis: Definiera $F(x) = f(x) - g(x) - \Gamma \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1)$. Vi väljer Γ så att för ett $z \in (x_0, x_1)$ är det sant att $F(z) = 0$. Vi ser från konstruktionen av $F(x)$ att det är sant att $F(x_0) = 0$ och att $F(x_1) = 0$. Anta att $F(x)$ är deriverbar två gånger och har kontinuerlig första derivatan. Vi vet att $F(x)$ har tre noll punkter i x_0, z , och x_1 . Då kan vi använda Rolles sats att dra slutsats att det finns ett α mellan x_0 och z sådan att $F'(\alpha) = 0$, och att det finns ett β mellan z och x_1 sådan att $F'(\beta) = 0$. Betrakta $F'(x)$ som ny funktion och använd Rolles sats en gång till. Det finns alltså ett γ mellan α och β sådan att $F''(\gamma) = 0$. Notera att $F''(x) = f''(x) - g''(x) - 2\Gamma$. Vi vet att $g(x)$ är en linjär funktion, så det måste vara så att $g''(x) = 0$. Nu vet vi att det finns en γ sådan att $0 = f''(\gamma) - 2\Gamma$ och $\alpha < \gamma < \beta$; vi har hittat att det går att uttrycka $\Gamma = \frac{1}{2}f''(\gamma)$. Alltså γ vi har hittat måste den ξ som satsten pratar om för vi har visat att det finns ett γ i intervallet sådan att $f(x) = g(x) + \frac{1}{2!}f''(\gamma)(x - x_0)(x - x_1)$ för $x_0 < \alpha < \gamma < \beta < x_1$.

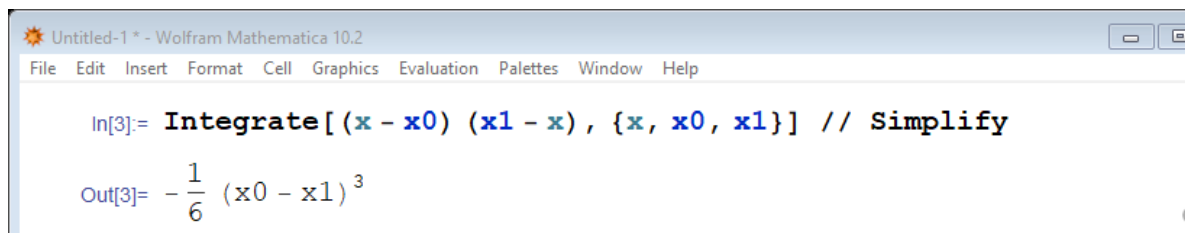
Ni ser skillnaden från Taylor satsen som säger att det går att hitta ett c sådan att $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(c)(x - x_0)^2$. Om vi byter Taylor polynomet mot interpolation behöver vi byta $\frac{1}{2}f''(c)(x - x_0)^2$ mot $\frac{1}{2}f''(\xi)(x - x_0)(x - x_1)$. Om vi kan nu begränsa den andra derivatan med en konstant, alltså $|f''(\xi)| \leq K_1$, då skillnaden mellan den exakta integralen och approximationen kan också begränsas. Vi betecknar skillnaden med

$$\epsilon_1 \equiv \text{exakt} - \text{approximation} = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx - \int_{x_0}^{x_0+h} g(x)dx = \int_{x_0}^{x_0+h} [f(x) - g(x)]dx$$

Skillnaden kan begränsas som

$$\begin{aligned} |\epsilon_1| &\leq \left| \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{1}{2}f''(\xi)(x - x_0)(x - x_1)dx \right| \leq \frac{K_1}{2} \left| \int_{x_0}^{x_0+h} (x - x_0)(x - x_1)dx \right| \\ &\leq \frac{K_1}{2} \int_{x_0}^{x_0+h} (x - x_0)(x_1 - x)dx \end{aligned}$$

Notera att i det sista steget byte jag från $x - x_1$ till $x_1 - x$ för att få en positiv integral (tal) så att jag kunde tappa bort absolut belopp tecken. Här i kompendiet visar jag inte hur man räknar integralen. Jag ber Mathematica att räkna integralen:



Det intressanta är att integralen beror bara på skillnaden av koordinater som beskriver kanter. Byt bara $x_1 \rightarrow x_0 + h$ då får ni

$$\int_{x_0}^{x_0+h} (x - x_0)(x_1 - x)dx = \frac{1}{6}h^3$$

och då får vi formel som säger vad den största tillåtna ϵ_1 är (om man ignorerar tecken):

$$|\epsilon_1| \leq \frac{K_1}{2 \cdot 6} h^3 = \frac{K_1}{12} h^3$$

Vi kan göra samma för alla intervaller $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ med $i = 1, 2, \dots, n$:

$$|\epsilon_i| \leq \frac{K_i}{12} h^3$$

Nu, gör vi samma sak över hela integrationsintervallet. Över hela intervallet alla sådana fel adderas. Det är enkelt att visa från integral egenskaper.

$$\epsilon = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx - \int_{x_0}^{x_n} g(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} (f(x) - g(x))dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - g(x))dx = \sum_{i=1}^n \epsilon_i$$

Den totala felet kan begränsas med hjälp av "triangle inequality":

$$|\epsilon| = |\epsilon_1 + \dots + \epsilon_n| \leq |\epsilon_1| + \dots + |\epsilon_n| \leq \frac{K_1}{12} h^3 + \dots + \frac{K_n}{12} h^3$$

Nu gäller det bara att plocka den största av alla "begränsande" konstanter: $K = \max\{K_1, K_2, \dots, K_n\}$. Då kan vi skriva

$$|\epsilon| \leq \frac{K_1}{12} h^3 + \dots + \frac{K_n}{12} h^3 \leq \frac{K}{12} h^3 + \dots + \frac{K}{12} h^3 = \frac{nK}{12} h^3$$

Notera att $nh = b - a$ så vi kan faktisk byta produkt nh och då tappar vi en potens i h ;

$$|\epsilon| \leq \frac{(b-a)K}{12} h^2$$

Detta betyder att

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} g(x)dx + O(h^2)$$

och nu gäller det att komma ihåg att faktisk $T_n \equiv \int_{x_0}^{x_n} g(x)dx$. Nu vet vi alltså att

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = T_n + O(h^2) = T_n + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Det här resonemanget förklarar varför skillnaden mellan den exakta integralen och approximationen betar sig som $O(h^2)$. Man kan resonera på samma sätt att förklara potensen i 6.7.TM5.

En diskussion av satsen 6.7.TM5: Om man göra samma uträkning som ovan då borde det bli så att

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = S_n + O(h^3)$$

men, det stämmer inte med boken som säger att

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = S_n + O(h^4)$$

Enligt det vanliga sättet att skatta felet potensen borde vara h^3 men just för Simpson regel använder man en symmetrisk intervall där mitt punkten ligger prick i mitten. Då får man en potens gratis. Låt oss visa hur allt hänger ihop.

Först, försöker vi med den grova skattningen av felet. Vi anar intuitivt att skillnaden mellan funktionen och den kvadratiske approximationen i intervallet $I_{01} \equiv I_0 \cup I_1 = [x_0, x_2]$ med $x_2 = x_0 + 2h$ borde kunna beskrivas som

$$f(x_0 + 2h) \sim s(x_0 + 2h) + \frac{1}{3!} f'''(c)h^3$$

där $c \in [x_0, x_0 + 2h]$. Alltså s är ett polynom av grad 2 so felet vi gör borde kunna beskrivas som ovan. Vi skattar alltså skillnaden med

$$f(x) - s(x) \sim \frac{1}{3!} f'''(c)h^3 \sim f'''(c)h^3$$

och antar att den varierar inte så mycket för $x \in I_{01}$. Detta betyder att felet per intervallet är ungefär

$$|\epsilon_{01}| = \left| \int_{x_0}^{x_0+2h} [f(x) - s(x)]dx \right| \sim \left| \int_{x_0}^{x_0+2h} f'''(c)h^3 dx \right| \sim |f'''(c)|h^3 \int_{x_0}^{x_0+2h} dx \sim |f'''(c)|h^4$$

Summerar vi över alla sådana fel

$$|\epsilon| \approx \frac{n}{2} |\epsilon_{01}| \sim n |f'''(c)| h^4 \sim |f'''(c)| n h h^3$$

och då använder vi att $(b - a) = hn$ som ger

$$|\epsilon| \sim |f'''(c)| (b - a) h^3$$

Men, som sagt, boken säger annorlunda: Boken säger att

$$|\epsilon| \sim |f''''(c)| (b - a) h^4$$

eller närmare sagt boken säger exakt så här

Error estimate for Simpson's Rule

If f has a continuous fourth derivative on the interval $[a, b]$, satisfying $|f^{(4)}(x)| \leq K$ there, then

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S_n \right| \leq \frac{K(b-a)}{180} h^4 = \frac{K(b-a)^5}{180n^4},$$

where $h = (b - a)/n$.

Varifrån kommer skillnaden? Varifrån kommer den fjärde derivatan och den fjärde potensen av h ? Vad är fel med vår uträkning? Hur kan vi härleda formeln i boken? Tyvärr, ADMAS kan inte hjälpa oss:

"Obtaining an error estimate for Simpson's Rule is more difficult than for the Trapezoid Rule. We state the appropriate estimate in the following theorem, but we do not attempt any proof. Proofs can be found in textbooks on numerical analysis."

Vi måste gräva oss fram på egen maskin. Den första frågan är: är det någonting fel med uträkningen ovan? Svar: nej. Problemet är bara att jag inte tog hänsyn till att intervallet som används för att konstruera den kubiska approximationen i Simpson är symmetrisk. Om man använder symmetrisk intervall då får man en potens "gratis". Som ADAMS säger, uträkningen är ganska krånglig så jag valde ett bevis som är ganska begriplig, dock man får lite större uppskattning av felet, närmare sagt beviset som jag kommer att visa er reproducerar inte 180 i nämnaren. Det viktiga är att vi kommer att visa varifrån potensen h^4 kommer.

Vi använder Taylorutvecklingen av funktionen kring mitt punkten och sedan istället för att integrera $f(x)$ integrerar vi Taylor polynomet:

$$f(x) = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) + \frac{1}{2} f''(x_1)(x - x_1)^2 + \frac{1}{3!} f'''(x_1)(x - x_1)^3 + \frac{1}{4!} f''''(c_1)(x - x_1)^4$$

med $c_1 \in [x_0, x_2]$. Nu integrerar vi Taylor polynomet

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \int_{x_0}^{x_2} \left[f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) + \frac{1}{2}f''(x_1)(x - x_1)^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_1)(x - x_1)^3 + \frac{1}{4!}f''''(c_1)(x - x_1)^4 \right] dx$$

och delar integralen i bitar

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx &= f(x_1) \int_{x_0}^{x_2} dx + f'(x_1) \int_{x_0}^{x_2} (x - x_1) dx + \frac{1}{2}f''(x_1) \int_{x_0}^{x_2} (x - x_1)^2 dx \\ &\quad + \frac{1}{3!}f'''(x_1) \int_{x_0}^{x_2} (x - x_1)^3 dx + \frac{1}{4!}f''''(c_1) \int_{x_0}^{x_2} (x - x_1)^4 dx \end{aligned}$$

Notera ett viktigt steg här. Vi har faktisk tillåtit att termen $f''''(c_1)$ och drog den utanför integralen. Det får vi inte göra för c_1 beror på x . Men, vi kan använda medelvärdesatsen för integraler att skriva

$$\int_{x_0}^{x_2} \frac{1}{4!}f''''(c_1)(x - x_1)^4 dx = \frac{1}{4!}f''''(\tilde{c}_1) \int_{x_0}^{x_2} (x - x_1)^4 dx$$

där återigen $\tilde{c}_1 \in I_{01}$.

Alla integraler över x är ganska enkla att räkna. Det är bara att använd variabel byte $u = x - x_1$.

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_2} dx &= \int_{-h}^h du = u|_{-h}^h = (h - (-h)) = 2h \\ \int_{x_0}^{x_2} (x - x_1) dx &= \int_{-h}^h u du = 0 \\ \int_{x_0}^{x_2} (x - x_1)^2 dx &= \int_{-h}^h u^2 du = 2 \frac{h^3}{3} \\ \int_{x_0}^{x_2} (x - x_1)^3 dx &= \int_{-h}^h u^3 du = 0 \\ \int_{x_0}^{x_2} (x - x_1)^4 dx &= \int_{-h}^h u^4 du = 2 \frac{h^5}{5} \end{aligned}$$

Nu kan vi pussla allt ihop

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx &= f(x_1)2h + f'(x_1) \cdot 0 + \frac{1}{2}f''(x_1)\frac{2}{3}h^3 + \frac{1}{3!}f'''(x_1) \cdot 0 + \frac{1}{4!}f''''(c_1) \cdot \frac{2}{5}h^5 \\ &= 2hf(x_1) + \frac{h^3}{3}f''(x_1) + \frac{h^5}{60}f''''(c_1)\end{aligned}$$

Notera att i ekvationen ovan det finns massa termer som försvann! Det är precis på grund av symmetri som vi diskuterade tidigare. Det är den första exempel på hur symmetri slår till.

Det finns en klassisk trick inom den numeriska matematiken hur man kan approximera andra derivatan.

$$\begin{aligned}f(x_1 + h) &= f(x_1) + f'(x_1)h + \frac{1}{2}f''(x_1)h^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_1)h^3 + \frac{1}{4!}f''''(c_2)h^4 \\ f(x_1 - h) &= f(x_1) - f'(x_1)h + \frac{1}{2}f''(x_1)h^2 - \frac{1}{3!}f'''(x_1)h^3 + \frac{1}{4!}f''''(c_3)h^4\end{aligned}$$

Räkna kombinationen

$$f(x_1 + h) + f(x_1 - h) = 2f(x_1) + f''(x_1)h^2 + \frac{1}{4!}(f''''(c_2) + f''''(c_3))h^4$$

då ser vi att

$$f''(x_1) = \frac{1}{h^2} \left[f(x_2) + f(x_0) - 2f(x_1) - \frac{1}{4!}(f''''(c_2) + f''''(c_3))h^4 \right]$$

Vi kan kombinera $f''''(c_2) + f''''(c_3)$ som vi skriver som $2f''''(c_{23}) = f''''(c_2) + f''''(c_3)$. Man kan fundera intuitivt kring $f''''(c_{23})$ som genomsnittet av $f''''(c_2)$ och $f''''(c_3)$. En smula kortare kan vi skriva

$$f''(x_1) = \frac{1}{h^2} \left[f(x_2) + f(x_0) - 2f(x_1) - \frac{2}{4!}f''''(c_{23})h^4 \right]$$

och från $\frac{2}{4!} = \frac{2}{4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{1}{4 \cdot 3} = \frac{1}{12}$ har vi

$$f''(x_1) = \frac{1}{h^2} [f(x_2) + f(x_0) - 2f(x_1)] - \frac{h^2}{12}f''''(c_{23})$$

Notera att i ekvationen ovan termer med $f'''(x_1)$ försvann! Det är precis på grund av symmetri som vi diskuterade tidigare. Det är den andra exempel på hur symmetri slår till.

Om vi använder formel ovan i den sista ekvationen för S får vi

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = 2hf(x_1) + \frac{h^3}{3} \left(\frac{1}{h^2} [f(x_2) + f(x_0) - 2f(x_1)] - \frac{h^2}{12} f''''(c_{23}) \right) + \frac{h^5}{60} f''''(c_1)$$

och när vi städar alla faktorer och omgrupperar termer

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = 2hf(x_1) + \frac{h}{3} [f(x_2) + f(x_0) - 2f(x_1)] - \frac{h^5}{36} f''''(c_{23}) + \frac{h^5}{60} f''''(c_1)$$

vi omgrupperar en smula och får

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3} [f(x_2) + f(x_0) + 6f(x_1) - 2f(x_1)] - \frac{h^5}{36} f''''(c_{23}) + \frac{h^5}{60} f''''(c_1)$$

Om fjärde derivatan kan begränsas med ett K då har vi

$$\left| -\frac{h^5}{36} f''''(c_{23}) + \frac{h^5}{60} f''''(c_1) \right| \leq \left| -\frac{h^5}{36} f''''(c_{23}) \right| + \left| \frac{h^5}{60} f''''(c_1) \right| \leq Kh^5 \left(\frac{1}{36} + \frac{1}{60} \right) = \frac{2Kh^5}{45}$$

Äntligen ser vi att

$$\left| \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx - \frac{h}{3} [f(x_2) + f(x_0) + 4f(x_1)] \right| \leq \frac{2Kh^5}{45}$$

och viktig är villkoret

$$|f''''(x)| \leq K$$

Notera att $\frac{h}{3} [f(x_2) + f(x_0) + 4f(x_1)] = S(I_0, I_1)$ är precis formel för Simpson regel när man tillämpar den på den första par att intervaller. Alltså vi har visat att

$$\left| \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx - S(I_0, I_1) \right| \leq \frac{2Kh^5}{45}$$

och det förklarar $O(h^4)$ beteende.

$$\left| \int_a^b f(x)dx - S_n \right| \leq \frac{n}{2} \frac{2Kh^5}{45} = \frac{Knh^5}{45} = \frac{K(b-a)h^4}{45}$$

Reduceringen $nh^5 = (b-a)h^4$ är lätt att förstå, men varifrån kommer faktorn $\frac{n}{2}$ ifrån? Notera att $S_n = S(I_0, I_1) + S(I_2, I_3) + \dots + S(I_{n-1}, I_n)$ har $\frac{n}{2}$ termer (inte n termer). På samma sätt har $\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \dots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx$ också $\frac{n}{2}$ termer. Notera också att faktorn $1/45$ är alltför pessimistisk.

Är Trapez regel bättre eller är det Simpson regel som är bättre? Satserna ovan visar att det är Simpson regel att föredra. Trapez och Simpson regel behöver vi lika många punkter, så Simpson är vinnaren. Dock Simpson kan vara lite dyrare när det kommer till datorresurser för man måste hålla på med bokföring av termer med hänsyn till om deras index är jämn eller udda. Också, vi måste vara säkra att vi har jämnt antal intervaller för Simpson. Det finns en grej till. Termen som beskriver fel beror på andra derivatan av $f(x)$ för Trapez regel och den fjärde derivatan för Simpson regel. Det kan hända att Trapez vinner på grund av det.