

GRUNDLÄGGANDE STRÖMNINGSLÄRA

Gunnar Eriksson

Institutionen för kemi- och bioteknik

Chalmers tekniska högskola

INNEHÅLLSFÖRTECKNING

1	Inledning.....	1
2	Tryck och tryckmätning	2
2.1	Definition av tryck	2
2.2	Krafter på ett fludelement	3
2.3	Olika tryckbegrepp.....	5
2.4	Mätning av tryck	8
3	Materialbalanser vid strömning: Kontinuitetsvillkoret	17
4	Energibalanser vid strömning: Bernoullis ekvation	20
4.1	Uppställning av Bernoullis ekvation.....	20
4.2	Härledning av Bernoullis ekvation med hjälp av termodynamikens första huvudsats	23
4.3	Användning av Bernoullis ekvation.....	24
5	Fluidier och viskositet	27
5.1	Newtons viskositetslag.....	28
5.2	Krafter på ett fludelement vid strömning.....	31
5.3	Olika viskositetsbegrepp och enheter.....	32
5.4	Viskositetens temperaturberoende	34
5.5	Icke-newtonska fluidier.....	36
5.6	Mätning av viskositet	40
6	Laminär och turbulent strömning	45
6.1	Laminär strömning. Gränsskikt.....	45
6.2	Laminär strömning i rör	46
6.3	Hagen-Poiseuilles ekvation.....	47
6.4	Turbulent strömning.....	50
6.5	Reynolds tal för rörströmning	53
6.6	Strömlinjer och tryck.....	57
7	Flödes- och hastighetsmätning	59
7.1	Olika typer av flödesmätare	59
7.2	Mätning av hastighet och flöde med apparatur grundad på Bernoullis ekvation.....	60

8	Rörströmning med förluster.....	68
8.1	Tryckförluster i raka rör	68
8.2	Engångsförluster.....	73
9	Rörsystem.....	82
9.1	Drivande kraft	82
9.2	Bernoullis modifierade ekvation i rörsystem	83
9.3	Sammanstatta rörsystem.....	86
9.4	Problemlösningsmetoder vid strömningsberäkningar i rörsystem	89
10	Pumpar	95
10.1	Pumparnas funktion.....	95
10.2	Lite pumpteorin	97
10.3	Pump- och systemkurvor.....	102
10.4	Verkningsgrad och effektbehov	111
10.5	Reglering	116
10.6	Sugförmåga	126
10.7	Jämförelser mellan olika pumpar	132
	Nomenklatur.....	135

GRUNDLÄGGANDE STRÖMNINGSLÄRA

Gunnar Eriksson

Institutionen för kemi- och bioteknik

Chalmers tekniska högskola

1 Inledning

Strömningsslära är ett ämne med vidsträckt intresse för alla ingenjörer. I kemisk processindustri handlar det mest om strömning av gaser och vätskor (eller andra fluider) i rör mellan olika apparater. Därför kommer fokus i denna bok att ligga på rörströmning, även om andra mer grundläggande fenomen också kommer att belysas. De fenomen som förekommer vid rörströmning har också stora likheter med strömning i porösa medier, ett annat viktigt område för en kemiingenjör. Detta tas dock inte upp inom ramen för denna kurs.

För att åstadkomma strömningen i en industriell process, behövs ofta fläktar eller pumpar. Vid valet av pump eller fläkt krävs kännedom om strömningen i rörsystemet, framförallt tryckfall och effektbehov. De beräkningar som krävs för detta kan ofta vara mycket komplicerade, men med hjälp av kunskap om de grundläggande fenomenen kan ofta förenklade beräkningar med god överensstämmelse göras. De regler som styr dessa överslagsräkningar, och som i huvuddrag är desamma som för de mer komplicerade beräkningarna, kommer att tas upp. Ett särskilt kapitel går lite djupare i begreppen kring pumpar. Mycket av den information som behövs för att göra beräkningarna mäts upp på olika sätt, i eller utanför processen. Olika metoder att mäta viskositet, tryck och flöde kommer därför också att beröras.

2 Tryck och tryckmätning

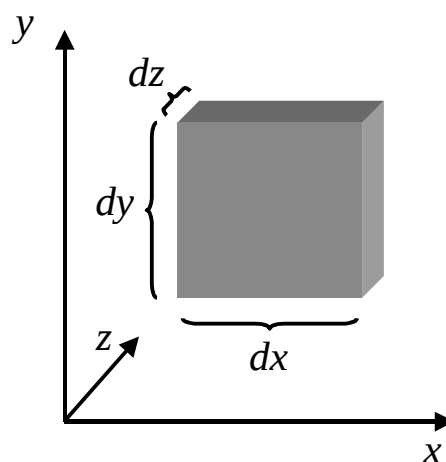
Strömning handlar om transport av fluider med hjälp av någon form av energi eller kraft. Av denna anledning måste krafterna som påverkar en fluid studeras, oftast i form av tryck.

2.1 Definition av tryck

En egenskap som är gemensam för fluider, är att molekyler kan röra sig mer eller mindre fritt i förhållande till varandra. När molekylerna rör sig, och kolliderar med ett fast föremål, kan de överföra energi, d.v.s. kraft, till den fasta ytan. Den sammanlagda kraften från alla kolliderande molekyler, räknat per ytenhet, är *tryck*, med beteckningen p och enheten Pa (Pascal), och kan beskrivas enligt:

$$p = \frac{F}{A} \quad [1]$$

Det är inte bara i kontakt mellan fluider och fasta ytor som detta tryck kan uppfattas, utan det finns också inne i själva fluiden, eftersom kraft också kan överföras mellan kolliderande molekyler. När man betraktar ett tänkt volymelement av fluiden, kan kraftöverföringen som sker i elementets yta divideras med ytans storlek för att få fram trycket inne i fluiden. Eftersom volymelementet kan väljas godtyckligt, finns det alltså tryck i hela fluiden.

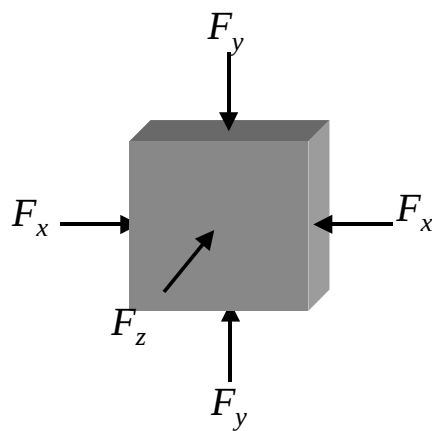


Figur 1. Ett fluidelement i form av en kub med sidorna dx , dy och dz .

2.2 Krafter på ett fluidelement

För att se vilka krafter som kan ligga bakom trycket i en fluid, kan vi titta på ett fluidelement, en tänkt avgränsning av fluiden. Det kan se ut hur som helst, men för enkelhetens skull kan vi välja en kub. Den kan även väljas godtyckligt stor. Storleken på detta element, volymen, bör väljas så liten som möjligt, för att det inte ska förekomma några skillnader mellan olika delar av elementet. Därför väljer man att betrakta oändligt små volymer. En oändligt liten kub med sidorna dx , dy och dz visas i figur 1.

Om vi ser på de krafter som verkar på ett fluidelement, kan vi dela upp dem i de krafter som verkar då elementet är *i vila* och de krafter som verkar då elementet är *i rörelse*. Vidare kan man också dela upp krafterna i de som verkar komprimerande, d.v.s. de som verkar rakt mot volymens yta (*normalkrafter*), och de som verkar skjuvande, d.v.s. de som verkar längs med ytan (*tangentialkrafter*). När man studerar trycket, är det bara normalkrafterna som räknas, och här kommer därför bara de krafterna att studeras. Vi återkommer till tangentialkrafterna senare (se kapitel 5.2).



Figur 2. Krafterna på ett kubiskt fluidelement i vila. Alla krafter är vinkelräta mot ytan, d.v.s. normalkrafter.

2.2.1 Ett fluidelement i vila

På ett fluidelement i vila verkar bara normalkrafter (figur 2), som omgivningen, d.v.s. fasta föremål och andra fluidelement, utövar mot elementets yta. Att fluidelementet är i vila innebär inte att molekylerna slutar röra sig (det finns inga väggar som stänger inne

molekylerna i elementet), men det är en balans i rörelserna, så att molekyler som passerar över elementets gränser hela tiden ersätts med andra. Då tar de sammantagna rörelserna ut varandra (genomsnittet av alla rörelser är 0), och elementet sägs vara i vila.

Om det inte skulle vara jämvikt mellan krafterna på elementets olika sidor, skulle elementet börja röra sig eller ändra utseende. Normalkrafterna på en sida måste därför vägas upp av motverkande krafter på andra sidan. Dessa krafter är alltså lika stora på vilken sida man än ser. Uttryckt som kraft per ytenhet motsvarar normalkrafterna på detta vilande element det som vi brukar kalla *tryck* (eller mer precist *statiskt tryck*, se kapitel 2.3.1). För trycket gäller Pascals lag, som lyder:

"Trycket i en viss punkt i en fluid i vila är samma i alla riktningar."

eller

$$p = p_x = \frac{F_x}{A} = p_y = p_z \quad [2]$$

Vi ser ur detta också att kraften, F , i ekvation [1] är normalkraften mot ytan, A , för fluidelementet.

2.2.2 Normalkrafter på ett fluidelement i rörelse

När fluidelementet rör sig uppstår krafter mot de ytor som är vända mot rörelseriktningen (se figur 3a). Fluidelementet påverkar sin omgivning mera i och med denna rörelse, och får också motsvarande kraftökning mot ytorna. Den ökade kraften motsvarar den kinetiska energin hos elementet. Denna kraft är inte likadan mot alla ytor, efter som den har en distinkt riktning. På en yta vänd rakt mot flödet ökar kraften med hela denna energi. Mot ytor som inte är riktade rakt mot rörelseriktningen, kommer endast en del av kraften att verka. Den delen motsvarar den komponent av kraftökningen som är vinkelrätt mot ytan (se figur 3b).

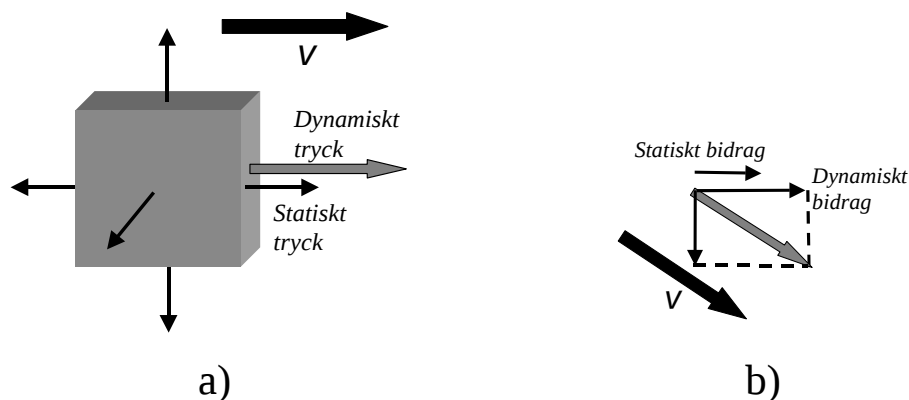
När man delar upp kraftökningen i komponenter, ser man tydligt att ju längre från strömningsriktningen en yta riktar sig, desto mindre av kraftökningen påverkar ytan. När ytan är vänd vinkelrätt mot strömningens riktning kommer denna komponent att vara 0. Det innebär att den ytan bara kommer att känna av samma krafter som vid vila.

2.3 Olika tryckbegrepp

Vi har sett att det är olika krafter på vilande eller rörliga fludelement. Man kan också dela upp krafterna i yttre och inre påverkan. De inre krafterna, som ger upphov till molekylrörelser, finns alltid, även i vilande fluider, och är, per ytenhet, det som vi i vardagligt tal kallar tryck. Eftersom det finns andra krafter, som också kan räknas om per ytenhet, måste vi vara lite mer tydliga och ge detta beteckningen *statiskt tryck* (eftersom det verkar även i vila). Den kraft som verkar vid rörelse på grund av den kinetiska energin är en yttre kraft. Räknat som tryck kallas den *dynamiskt tryck*. En annan yttre kraft uppstår p.g.a. gravitationen, och är alltså fludelementets tyngd. Den kan relateras till potentiell energi, och är därför också beroende av höjdskillnader (se nedan), vilket gör att den som tryck ofta kallas *höjdtryck*. I sammanhang där det inte är så stora höjdskillnader, är det oftast mest statiskt och dynamiskt tryck som är relevanta. Då är summan av dessa två, *totaltrycket* eller *stagnationstrycket*, också ett användbart begrepp.

2.3.1 Statiskt tryck, p

Det statiska trycket är alltså de krafter som verkar mellan ett fludelement i vila och dess omgivning. Detta kan mätas med någon form av tryckmätare (se kapitel 2.4). Om elementet inte är i vila, finns ändå det statiska trycket, men rörelsen innebär att ytterligare en kraft verkar på omgivningen (se figur 3a). Denna verkar dock bara i rörelsens riktning, vilket vi kan utnyttja vid tryckmätningen. Om vi studerar en riktning som är vinkelrät mot rörelseriktningen har vi ingen påverkan av rörelsen. Detta innebär att vi kan bestämma det statiska trycket genom att mäta vinkelrätt mot strömningsriktningen. Detta är speciellt viktigt



Figur 3. a) Rörelsen hos ett fludelement ger upphov till en ökning av den sammanlagda kraften i strömningsriktningen. b) I andra riktningar kan denna kraft delas upp i komponenter, som ger ett bidrag till den sammanlagda kraften, utom vinkelrätt mot strömningsriktningen

vid mätning i ett rör där fluiden ofta strömmar med väsentlig hastighet. I ett rör anses det statiska trycket vara konstant i hela tvärsnittet (det är inte så stor höjdskillnad mellan rörets väggar, även i ett horisontellt rör), så i det fallet sker denna mätning oftast någonstans på rörets mantelyta.

2.3.2 Dynamiskt tryck, $\rho v^2/2$

Det dynamiska trycket är den kraft som fludelementet påverkar omgivningen med på grund av sin rörelse. Det är beroende av strömningshastigheten i kvadrat. En bestämning av detta tryck är viktig då fluidens hastighet eller flöde ska bestämmas.

Dynamiskt tryck innebär en extra kraft i rörelseriktningen. Det ger också ett bidrag i andra riktningar, mindre än i rörelseriktningen, utom vinkelrätt mot denna. Kraften mot omgivningen blir då en summering av det statiska bidraget och det dynamiska bidraget. Det går inte att komma undan det statiska bidraget, så det dynamiska trycket kan aldrig mätas direkt. Mätning av den sammanlagda kraften (se totaltryck nedan) och kännedom om det statiska trycket kan dock indirekt ge det dynamiska bidraget. Mätt i rörelseriktningen, blir det dynamiska bidraget lika med det dynamiska trycket. Det är viktigt att ytan som används vid denna tryckmätning är riktad helt mot strömningens riktning, annars får inte det dynamiska trycket fullt utslag i mätningen.

Vid mätning i ett rör varierar hastigheten över tvärsnittet. Därför kommer även det dynamiska trycket att variera lokalt. En mätning i en viss punkt kan då ge hastigheten i denna punkt. I de flesta fallen är det dock ett medelvärde för hela tvärsnittet som används, vilket ger en medelhastighet.

2.3.3 Totaltryck eller stagnationstryck, p_0

Summeringen av dynamiskt tryck och statiskt tryck kallas totaltryck, betecknat p_0 , och uttrycks enligt:

$$p_0 = \rho \cdot \frac{v^2}{2} + p \quad [3]$$

Om vi studerar en strömmande fluid som möter en stillastående yta, kommer den kraft, med vilken elementet verkar på ytan att vara summan av kraften från rörelsen och den inre kraften,

d.v.s. trycket på denna yta kommer att vara *totaltrycket*. En annan beteckning på denna summa är *stagnationstryck*, eftersom den strömmande fluiden bromsas in till stillastående, blir *stagnant*, när den möter den stillastående ytan.

Vid inbromsningen omvandlas det dynamiska trycket till ett statiskt tryck i denna *stagnationspunkt*, och summan blir då ett förhöjt statiskt tryck istället. Mätning kan ske med likartade utrustningar som vid mätning av vanligt statiskt tryck. En viktig skillnad är dock att mätningen måste ske *rakt mot strömningsriktningen* för att det ska vara totaltrycket man mäter. Detta sker ofta genom en anordning, som på något sätt kan föras in i strömningen. I figur 39 är ett exempel på ett sådant, ett Pitotrör.

2.3.4 Höjdtryck, $\rho \cdot g \cdot h$

Ett fluidelements tyngd är en yttre kraft som elementet påverkar sin omgivning med. Det är också en kraft som utövas på ett visst element av andra element. Eftersom gravitationen verkar nedåt, är denna kraft också riktad nedåt. Ett element på en viss nivå påverkas därför av tyngden från alla fluidelement ovanför, men inte av elementen vid sidan av. Här spelar alltså nivån eller *höjden* en roll. För att det ska vara balans mellan krafterna (se kapitel 2.2.1, vilande fluidelement), måste den yttre påverkan på elementet omvandlas till inre krafter, så ett element på en låg nivå, med mycket tyngd från ovanför liggande element, får då istället ett högre statiskt tryck än de fluidelement som ligger högre upp. För ett stillastående fluidelement, med en fluidpelare med höjden Δh ovanför sig, kommer tryckändringen, Δp , att bli:

$$\Delta p = \frac{F}{A} = \frac{m \cdot g}{A} \quad [4]$$

där m är massan av fluidpelaren och A är arean av denna pelare. Massan kan uttryckas med hjälp av densiteten, ρ , och volymen av pelaren (som är höjden gånger arean, $\Delta h \cdot A$), så ekvation [4] kan uttryckas som

$$\Delta p = \frac{\rho \cdot \Delta h \cdot A \cdot g}{A} = \rho \cdot g \cdot \Delta h \quad [5]$$

Vi ser att arean på fluidpelaren inte finns med i det slutliga uttrycket, utan bara höjden, vilket innebär att det inte spelar någon roll hur bred pelaren är (eller om den är sned), bara hur hög

den är. Ekvation [5] är uttryckt som en skillnad (Δh), men man ser ofta höjdtrycket som en term med bara h . Då måste man välja en *referenshöjd*, d.v.s. att man egentligen räknar med en höjdskillnad gentemot referensen:

$$\rho \cdot g \cdot h = \rho \cdot g \cdot (h - h_{ref}) \quad [6]$$

Om referenshöjden är samma i alla termer (t.ex. "höjd över havet"), brukar den dock utelämnas.

2.4 Mätning av tryck

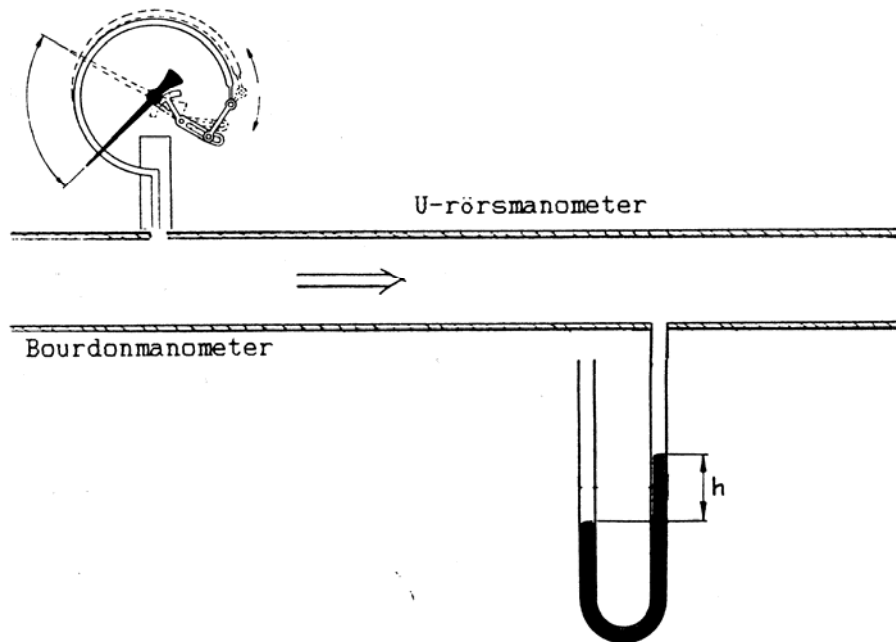
Att kunna mäta trycket är väsentligt för att få data för att kunna beräkna de krafter som beskriver strömningens fenomen. Med hjälp av tryckmätningar kan man både bestämma det statiska trycket (direkt) och det dynamiska trycket (indirekt, genom mätning av totaltrycket). Tryckmätning är relativt enkelt och görs mer eller mindre noggrant och med olika metoder beroende på i vilket tryckintervall mätningen ska ske. Det gemensamma för de olika metoderna är att de bygger på kraftbalanser. Den okända kraften (trycket) bestäms genom att antingen motkraften är känd eller att verkan av skillnaderna mellan krafterna är bestämd.

Vid mätning av tryck vid rörströmning är det vanligast att det statiska trycket mäts vid rörväggen, med ett tryckuttag vinkelrätt mot strömningen (se kapitel 2.3).

2.4.1 Mätning av differenstryck eller absoluttryck

Eftersom det är tal om en kraftbalans, är det oftast tal om en tryckskillnad som mäts, s.k. *differenstryckmätning*. Instrumenten som används vid denna metod kallas med ett gemensamt namn *manometrar*. Metoden kan utnyttjas för att bestämma ett tryck genom att utnyttja ett känt referenstryck. Det allra vanligaste är att atmosfärstrycket används som mottryck, d.v.s. att instrumentet är öppet mot atmosfären på ena sidan. Det utslag som då visas på mätinstrumentet är alltså ett *övertryck* (tryckskillnad över atmosfärstrycket) eller ett *undertryck* (tryckskillnad under atmosfärstrycket). Metoden kan dock lika gärna användas för att bestämma skillnaden mellan två okända tryck, vilket många gånger är mer intressant, t.ex. om det är det dynamiska trycket som ska bestämmas.

Om den ena sidan är tillsluten och evakuerad, finns det inget mottryck. Då mäts istället det *absoluta* eller *barometriska trycket*. Denna metod kallas *absoluttryckmätningar*, och instrumenten kallas *barometrar*. Många av de olika typerna av manometrar som nämns nedan finns också som barometrar, med någon typ av en evakuerad kammare ansluten till ena sidan



Figur 4. Två olika manometrar, en Bourdonrörsmanometer (elastiskt element) och en U-rörsmanometer, vid tryckuttag i rörväggen.

av anordningen.

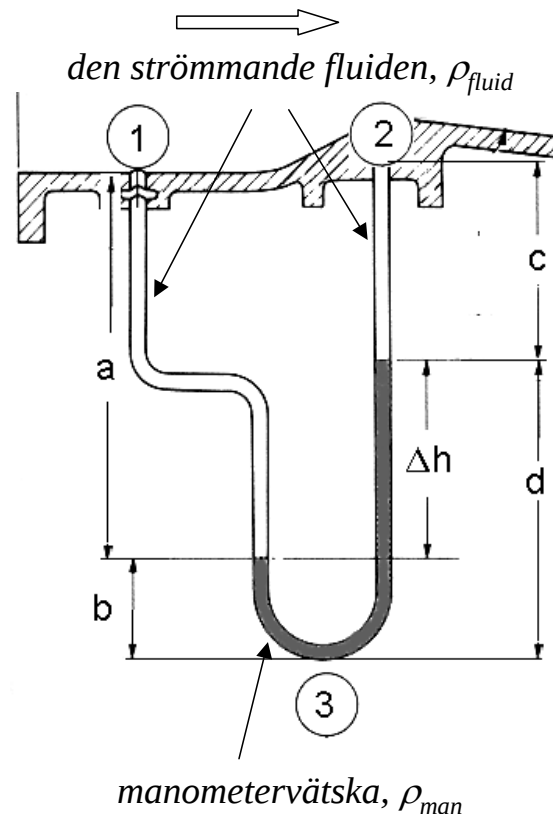
Den centrala enheten i en anordning för mätning av tryck är ett element som ställer in sig i ett visst jämvikstläge vid en viss tryckskillnad. De vanligaste typerna är *U-rörsmanometrar* eller manometrar med *elastiska element*, men det förekommer även flera andra typer.

2.4.2 U-rörsmanometrar

U-rörsmanometern (se figur 4 och 5) är en enkel anordning, bestående av ett rör fyllt med en vätska, *manometervätskan*. Röret är böjt på ett sådant sätt att det bildas två vätskepelare i var sin skänkel. Vätskeytorna kan ha kontakt med två olika tryck. Om det är en tryckskillnad mellan dessa tryck, ställer de olika vätskeytorna in sig på olika nivåer, och nivåskillnaden är beroende av denna tryckskillnad. Manometervätskan bör vara oblandbar med den fluid man ska mäta trycket i, och det bör också vara en lätt avläsbar nivå. Det vanligaste är att mätning sker genom direkt (optisk) avläsning av nivåerna, och U-röret är då vanligen av glas, men det

förekommer även anordningar med automatisk avläsning av nivåerna, t.ex. med hjälp av flottörer eller andra nivåmarkörer, som passar bättre för industriellt bruk.

Tryckskillnaden beräknas med en ekvation, som kan härledas på samma sätt som ekvation [5]. Här måste vi dock dela upp manometervätskan i två olika pelare, som verkar på den gemensamma lägsta punkten. Betrakta en U-rörsmanometer med de båda skänklarna anslutna



Figur 5. U-rörsmanometer för mätning av tryckskillnad mellan två punkter i ett rör med en strömmande fluid.

till två olika tryck, p_1 och p_2 , i ett rör med en strömmande fluid (se figur 5). Ovanför manometervätskan är manometern är fylld med samma fluid som strömmar i röret. Kraften som pressar mot botten av manometern ska vara samma från båda hållen, d.v.s. balans bör råda. Kraften kan även uttryckas i form av trycktermer. Trycket i botten (punkt 3) kan uttryckas som en tryckskillnad gentemot den strömmande fluiden, p.g.a. tyngden från fluidpelaren, höjdtrycksbidraget. Denna pelare får (i båda skänklarna) delas upp i två delar, dels den strömmande fluiden och dels manometervätskan, och höjdtrycksbidraget blir då summan av de båda delarna. För vänstra skänkeln blir detta, med beteckningar enligt figuren:

$$p_3 - p_1 = \rho_{fluid} \cdot g \cdot a + \rho_{man} \cdot g \cdot b \Rightarrow p_3 = p_1 + \rho_{fluid} \cdot g \cdot a + \rho_{man} \cdot g \cdot b \quad [7]$$

där ρ_{fluid} och ρ_{man} är den strömmande fluidens respektive manometervätskans densitet. På samma sätt blir det för högra skänkeln:

$$p_3 = p_2 + \rho_{fluid} \cdot g \cdot c + \rho_{man} \cdot g \cdot d \quad [8]$$

Kombination av ekvationerna [7] och [8] ger nu:

$$p_1 - p_2 = \rho_{fluid} \cdot g \cdot (c - a) + \rho_{man} \cdot g \cdot (d - b) \quad [9]$$

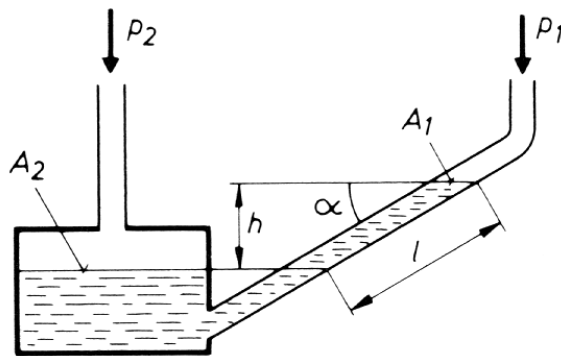
Nivåskillnaden, ofta betecknad Δh (eller ibland lite oegentligt bara h), ger till sist uttrycket

$$\begin{aligned} \Delta h = a - c = d - b & \Rightarrow \\ p_1 - p_2 = (\rho_{man} - \rho_{fluid}) \cdot g \cdot \Delta h & \quad [10] \end{aligned}$$

Observera att denna ekvation bara gäller om det är samma fluid ovanför manometervätskan i båda skänklarna. Om det är olika fluider får man använda sig av hela kraftbalansen. I fallet att densiteten för manometervätskan är mycket större än för fluiden (eller fluiderna) ovanför denna (exempelvis vatten-luft), kan ekvationen förenklas till:

$$\rho_{man} \gg \rho_{fluid} \Rightarrow p_1 - p_2 \approx \rho_{man} \cdot g \cdot \Delta h \quad [11]$$

En fördel med en U-rörsmanometer, utöver att den är väldigt enkel och lättanvänd, är att den har små mätfel. Med lämpliga åtgärder, kan den därför användas för kalibrering av andra mätanordningar. För att öka noggrannheten i avläsningen kan man välja olika manometervätskor (med olika densitet), för att få lämpligt nivåskillnad.



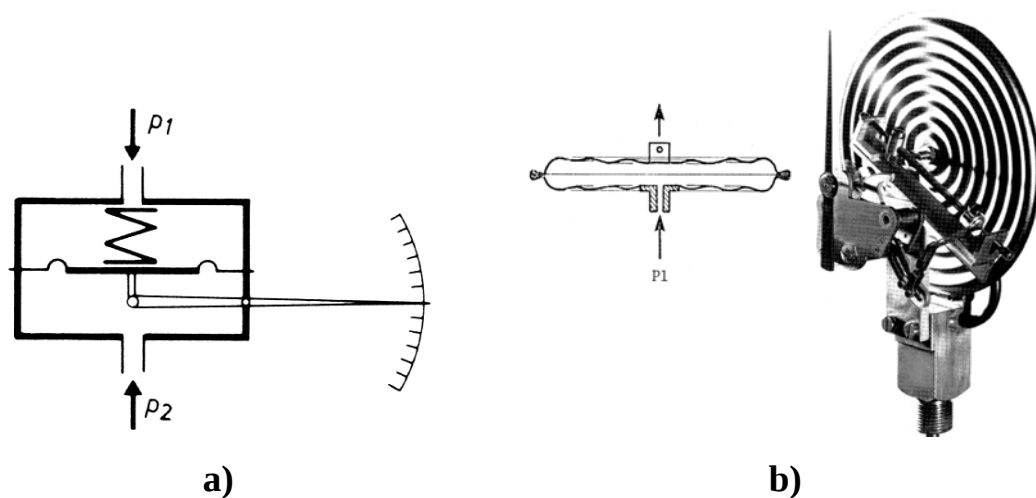
Figur 6. U-rörsmanometer med en lutande skänkel för noggrannare avläsning. Den större ytan, A_2 , kommer inte att röra sig mer än försumbart, och skalan l kan därmed uttrycka nivåskillnaden direkt.

För väldigt små differenser kan avläsningens noggrannhet också ökas genom att luta skänkeln (se figur 6). Om den ena av de två vätskeytorna dessutom är mycket större än den andra, innebär det att den större ytan knappast kommer att ändra nivå när den mindre rör sig, vilket gör att hela ändringen ligger i den mindre ytans nivå. En ändring av nivåskillnaden innebär ju en omflyttning av vätskevolym, och de små volymer som är aktuella i den lilla pelaren är försumbara i förhållande till den stora ytan. Detta underlättar avläsningen, eftersom skalan inte blir beroende av två rörliga ytor, och därför kan uttrycka tryckskillnaden mer direkt.

2.4.3 Manometrar med elastiska element

Den vanligaste typen av manometrar i industrin är de med elastiska element. De elastiska elementen kan se ut på många olika sätt, och det finns därför många olika manometrar av denna typ. Elementen, som oftast är gjorda av metall, rör sig eller deformeras på något sätt när de utsätts för tryck. Denna rörelse är proportionell mot skillnaden i tryck på båda sidor om elementet, och kan lätt överföras antingen mekaniskt till en visare eller elektriskt exempelvis till en processdator.

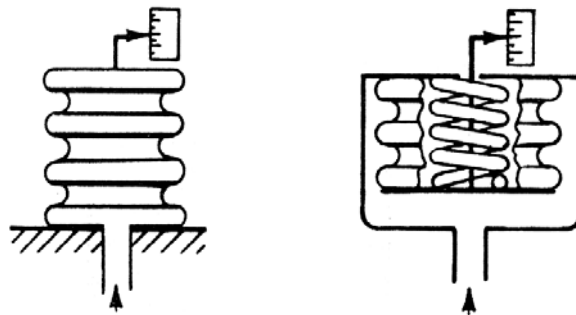
De elastiska elementen kan delas upp i tre huvudsakliga typer: *membran*, *bälgar* och *rörfjädrar eller Bourdonrör*. Av dessa är Bourdonröret den vanligaste, mycket beroende på att den är användbar i ett stort intervall av tryckskillnader.



Figur 7. Membranelement a) Enkelt membran (med fjäderbelastning). b) Aneroid.

Membranmanometern består av en kammare som delas upp i två delar, med de olika delarna i kontakt med var sitt tryck. I skiljeväggen sitter membranet, och om det uppstår en tryckskillnad mellan de båda delarna, kommer detta att bukta åt ena eller andra hållet. Denna rörelse kan kopplas till en visare (se figur 7a). En variant av membranelement är *aneroiden*, som består av en två hopsvetsade membran som bildar en kammare (se figur 7b). Denna kammare kan på ett enkelt sätt slutas helt och evakueras, vilket är orsaken till att aneroiden är vanlig i barometrar. Membranelement ger bra noggrannhet och går att använda vid olika tryckintervall, beroende på vilket material som används, men klarar ofta inte mer än 2-3 bars tryckskillnad, eftersom buktningen annars leder till kvarstående deformationer i elementet.

Ett tåligare element är *bälgen*. Den är en kammare med elastiska väggar, som utvidgar sig eller kryper ihop beroende på trycket i kammaren (se figur 8). Rörelsen sker i väggarnas



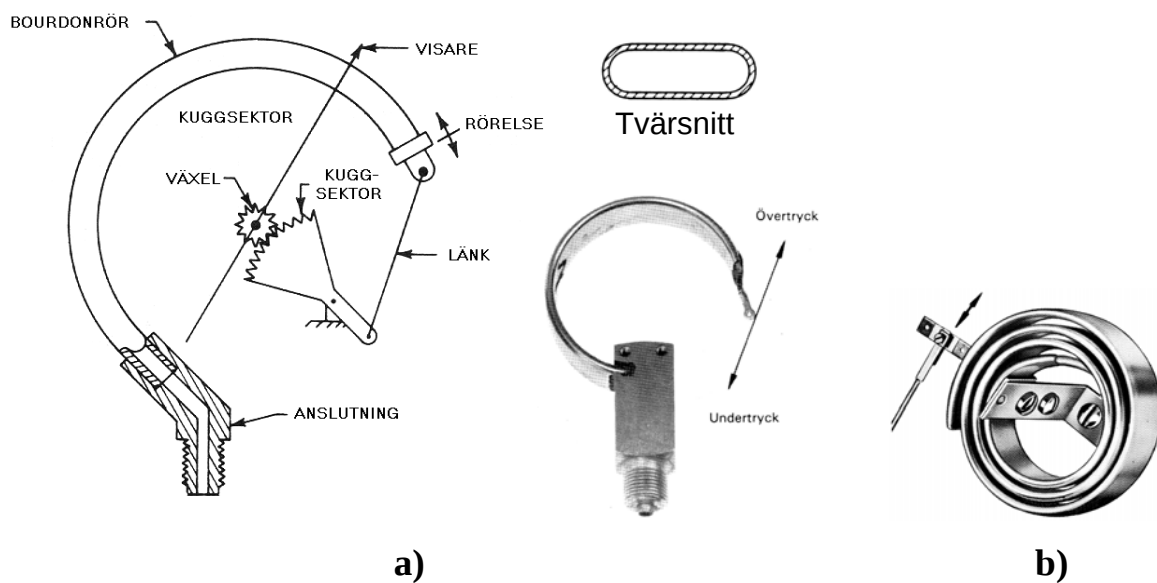
Figur 8. Bälgsmanometrar, både utan och med fjäderbelastning.

riktning, och inte i form av buktning som för membranen. Detta gör att bälgarna klarar betydligt högre tryckskillnader, 50-60 bar, men innebär också att de inte kan mäta för små tryckskillnader.

Både membran och bälgar är ofta försedda med *belastningsfjädrar*. Ett visst läge, d.v.s. en viss utvidgning, för det elastiska elementet innebär att detta vill fjädra tillbaka med en viss kraft, som motsvarar den kraft som tryckskillnaden över elementet utövar. Detta jämviktsläge kan förändras genom att införa en fjäder, vars fjädrande kraft kan verka antingen med eller mot tryckskillnaden. Detta innebär en förskjutning av mätområdet, och om olika fjädrar används, kan ett och samma element alltså mäta i olika tryckintervall.

En av de allra vanligaste manometertyperna är annars *rörfjäder-* eller *Bourdonrörsmanometrar* (se figur 9). Det elastiska elementet i dessa är ett rör med en väldigt platt profil,

som är böjt i en fjädrande båge. Den ena änden är tillsluten och den andra är ansluten till det tryck man vill mäta. Skillnaden mellan trycket inne i röret och trycket i mätkammaren utanför röret innebär att en kraft verkar på rörväggen, ut ifrån röret vid övertryck och in emot röret vid undertryck. Eftersom rörets yta är större i bågens yttre kurva, blir kraften större där, vilket innebär att en ökning av tryckskillnaden kommer att leda till en uträtning av röret, och tvärtom vid en minskning. Det innebär att rörets ände kommer att röra sig, och denna rörelse översätts till en tryckavläsning. Det går att mäta skillnaden mellan två tryck i ett Bourdonrör, men det vanligaste är att mätkammaren är öppen mot atmosfären, och att det därför är övertryck eller undertryck som mäts. Bourdonrör kan användas vid höga tryckskillnader, upp emot 1000 bar eller mer, om rätt material används. Det innebär dock att känsligheten minskar. En variant av rörfjäderelement, som kan kombinera hög känslighet med högt maximitryck, är en *snäckfjäder* (se figur 9b). Istället för en båge är röret böjt i en spiral, vilket innebär att rörelsen, och därmed också utslaget, blir större vid en förändring av trycket.



Figur 9. a) *Bourdonröret* (rörfjädern) är ett rör med avplattat tvärsnitt, i en båge som sträcks ut vid övertryck i röret. b) *Snäckfjädern* är en variant böjd till en spiral i stället för en båge.

2.4.4 Övriga anordningar för tryckmätning

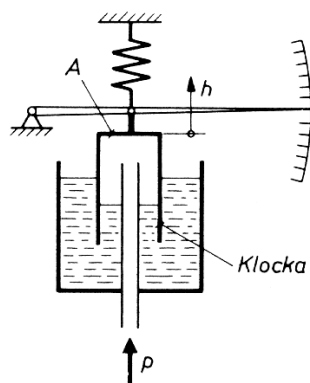
Vid mätning av tryckdifferenser kan man använda sig av en *ringvåg* (se figur 10a). Den består av en ringformad behållare med två öppningar för de olika tryckmedierna och en skiljevägg i

övre delen behållaren. I nedre delen av ringen skiljs de olika tryckmedierna av en spärrvätska. Om det uppstår en tryckskillnad, kommer den ena sidan av skiljeväggen att utsättas för en större kraft, vilket leder till en vridning. Denna balanseras av en motvikt, vilket innebär att en viss vridning (ett visst läge) motsvarar en viss tryckdifferens. Byte av motvikt ändrar mätområdet. Spärrvätskan förskjuts, precis som i ett U-rör, men deltar inte i själva utbalanseringen. Valet av vätska för olika mätområden är ändå betydelsefullt, eftersom en alltför stor förskjutning leder till att vätskan går ut i det låga tryckuttaget. Ett stort mätområde kräver alltså en vätska med hög densitet.

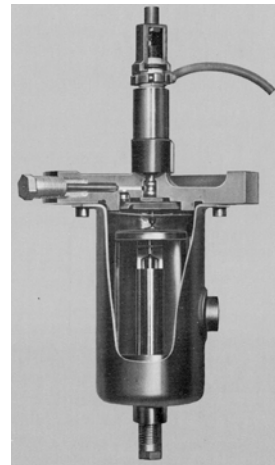
För mätning av gas- eller lufttryck i närheten av atmosfärstrycket med god noggrannhet, kan en *klockmätare* användas (se figur 10b). Den består av en klocka nedsänkt i en spärrvätska på så sätt att det bildas en gasficka i klockan. Vid ökat tryck vill klockan lyftas, vilket motverkas



a)



b)



Figur 10. a) Ringvåg för mätning av tryckdifferenser. b) Klockmätare.

av en tryckfjäder, och balansen leder till ett bestämt läge för ett bestämt tryck. Byte av fjäder innebär ändrat mätområde.

För mycket noggranna mätningar vid måttliga till höga tryck, kan en *kolvmätare* användas. Den består i princip av en kolv som belastas med motvikter och fjädrar. När trycket ansluts till trycksidan, pressas kolven uppåt. Hur stor kraft som krävs beror på kolvens och motvikternas tyngd. Vid en viss hoptryckning av fjädrarna, nås en kraftbalans mellan trycket och fjädrarnas motkraft. Reglering av mätområde kan ske genom byte av motvikter eller fjädrar. Genom att fylla tryckanslutningen med olja, som pressas upp genom packningen, kan

man se till att kolven alltid är välsmord och friktionen låg. För att ytterligare minska friktionen roteras kolven med hjälp av en motor. Detta gör att noggrannheten kan bli så hög som 0,1 - 0,001 % av mätvärdet.

Ofta vill man ha en elektrisk signal att bearbeta, exempelvis i ett processdatorsystem. Detta sker oftast genom omvandling av mätutslagen. En mätmetod som direkt ger en elektrisk signal är *motståndsgivarna*, som ändrar elektrisk resistans vid olika tryck. Detta kan mätas med hjälp av en mätbrygga. Trådtöjningsgivare, som bygger på att metallen i givaren ändrar resistans när den töjs ut, är vanlig för att mäta höga tryck. Detta görs genom att mäta utvidgning av ett metallelement, oftast i form av en tunnväggig cylinder, vilken är beroende av trycket. En annan metod är att använda ett element som ändrar resistans (*piezoresistivt*) eller ändrar ledningsförmågan (*piezoelektriskt*) vid sammanpressning. Fördelen med dessa är att de reagerar väldigt snabbt på förändringar, och därmed är bra på att mäta tryck med högfrekventa ändringar.

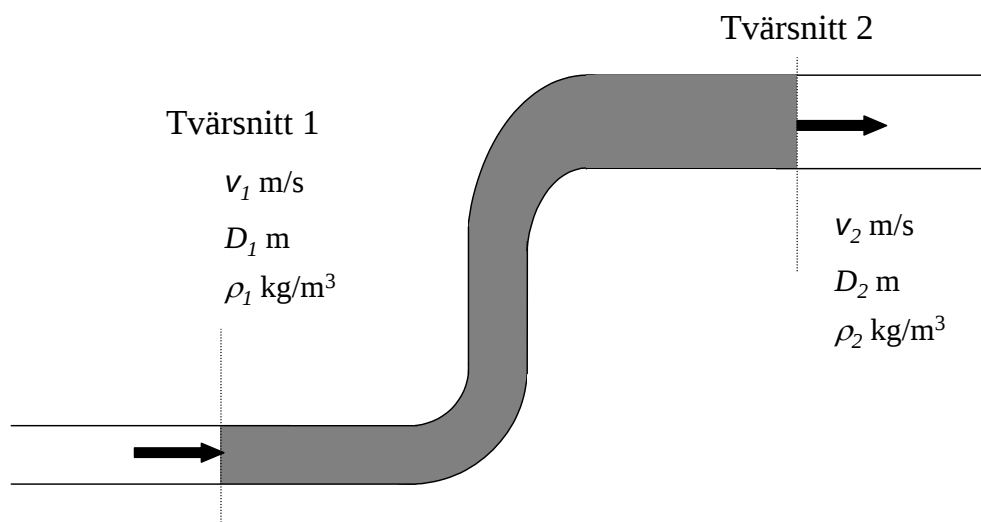
3 Materialbalanser vid strömning: Kontinuitetsvillkoret

För att kunna göra nödvändiga beräkningar för strömningen, är det viktigt att bestämma vilket system man ska räkna på. Material- och energibalanser ställs sedan upp utifrån systemets begränsningar. Eftersom de flesta problem som ska lösas liknar varandra på något sätt, finns det också mer eller mindre standardiserade sätt att ställa upp beräkningarna på, vilket leder till att balanserna har fått egna namn inom strömningsläran: Vid materialbalanserna används *kontinuitetsekvationen* medan man vid energibalanserna ofta använder *Bernoullis ekvation*. För att använda dessa ekvationer, måste dock vissa krav vara uppfyllda.

Vid strömning i rör är det ofta mest praktiskt att välja rörsystemet, eller en del av det, som själva systemet, d.v.s. vi har ett *öppet system* med ett flöde in i och/eller ut ur systemet. Om vi har *stationärt flöde*, d.v.s. konstant flöde, har vi samma flöde in i som ut ur systemet, och ingen ansamling av massa i systemet. Då blir materialbalansen över systemet (med $\dot{m}$ som massflöde):

$$\sum \dot{m}_{in} = \sum \dot{m}_{ut} \quad [12]$$

d.v.s. massflödet är konstant genom systemet. Detta kallas i strömningssammanhang för *kontinuitetsvillkoret*. Villkoret för att denna ekvation ska gälla är alltså att *flödet är stationärt*. Om flödet skulle vara icke-stationärt, kommer en ändring i flödet på väg in i systemet inte att motsvaras av en omedelbar ändring i utflödet (det tar en viss tid för ändringen att färdas



Figur 11. Ett öppet system bestående av en rörsektion begränsad av två tvärsnitt. Vid stationärt flöde är inflödet i tvärsnitt 1 lika med utflödet i tvärsnitt 2.

genom systemet), vilket gör att ekvation [12] inte gäller i det fallet.

Kontinuitetsekvationen är ett väldigt användbart samband, t.ex. om man vill bestämma flödeshastigheten i ett rörsystem med kända dimensioner. Om vi studerar ett enkelt system, en sektion av ett rör med ett inlopp och ett utlopp (se figur 11), kan vi ställa upp kontinuitetsvillkoret för detta system:

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 \quad [13]$$

Massflödet är volymflödet multiplicerad med densiteten, vilket ger:

$$\dot{m} = \rho \cdot \dot{V} \Rightarrow \rho_1 \cdot \dot{V}_1 = \rho_2 \cdot \dot{V}_2 \quad [14]$$

Volymflödet är medelhastigheten för strömningen multiplicerad med tvärsnittsarean:

$$\dot{V} = v \cdot A \Rightarrow \rho_1 \cdot v_1 \cdot A_1 = \rho_2 \cdot v_2 \cdot A_2 \quad [15]$$

Detta är en allmän form som gäller för alla system med endast ett inflöde och ett utflöde. Ofta kan man dock göra vissa förenklingar, för att få mer lättanvända former.

Om röret har ett cirkulärt tvärsnitt, kan tvärsnittsarean bytas ut mot diametern:

$$A = \pi \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2 \Rightarrow \rho_1 \cdot v_1 \cdot D_1^2 = \rho_2 \cdot v_2 \cdot D_2^2 \quad [16]$$

Om densitet är konstant, så innebär kontinuitetsvillkoret också att volymflödet är konstant.

Detta kallas *inkompressibel strömning*. I de flesta fall kan vätskor antas vara inkompressibla, åtminstone inom rimliga marginaler. Vi får då:

$$v_1 \cdot A_1 = v_2 \cdot A_2 \quad [17]$$

eller, för ett rör med cirkulärt tvärsnitt,

$$v_1 \cdot D_1^2 = v_2 \cdot D_2^2 \quad [18]$$

I fallet att fluiden inte är inkompressibel (t.ex. en gas), måste ekvation [15] eller [16] användas, men vid vätskeströmning används nästan uteslutande ekvation [17] eller [18].

Exempel 1

En vätska strömmar i ett rör som på ett ställe har diametern 100 mm. Medelhastigheten i detta tvärsnitt har mätts upp till 1,3 m/s. Vad blir då hastigheten i ett annat tvärsnitt, där diametern bara är 60 mm? Flödet kan antas vara stationärt.

Lösning:

Kontinuitetsvillkoret för inkompressibel strömning, ekvation [18], ger oss:

$$\frac{v_2}{v_1} = \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2 \Rightarrow v_2 = v_1 \cdot \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2$$

Med $v_1 = 1,3$ m/s; $D_1 = 0,100$ m och $D_2 = 0,060$ m fås:

$$v_2 = 1,3 \cdot \left(\frac{0,100}{0,060} \right)^2 = 3,6 \text{ m/s}$$

Svar: Flödes hastigheten blir 3,6 m/s i detta tvärsnitt.

För system med flera in- eller utlopp, grenat flöde, blir sambanden likartade, men en summering av inlopp respektive utlopp måste göras. Exempelvis blir sambanden för ett system med ett inlopp och två utlopp:

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 + \dot{m}_3 \quad [19]$$

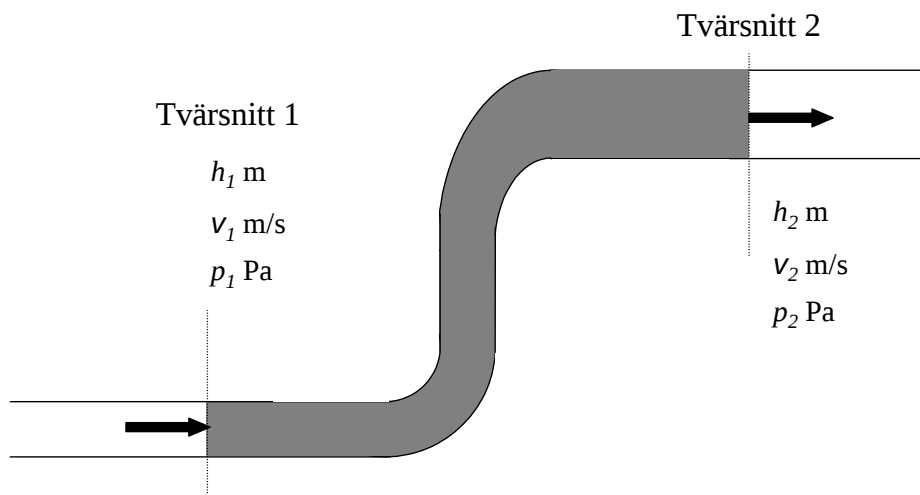
$$\rho_1 \cdot v_1 \cdot A_1 = \rho_2 \cdot v_2 \cdot A_2 + \rho_3 \cdot v_3 \cdot A_3 \quad [20]$$

$$\rho_1 \cdot v_1 \cdot D_1^2 = \rho_2 \cdot v_2 \cdot D_2^2 + \rho_3 \cdot v_3 \cdot D_3^2 \quad [21]$$

Lösningen av ovanstående ekvationer, eller mer komplicerade fall, kräver mer tillgänglig information, men följer i stort sett samma mönster som vid ogrenat flöde. Detta tas dock upp längre fram.

4 Energibalanser vid strömning: Bernoullis ekvation

För att det ska förekomma ett flöde krävs det energi. Denna kan finnas i olika former i själva systemet, eller tillföras utifrån. Det är därför väsentligt att även ställa upp en energibalans. Den grundläggande energibalansen vid strömning har sin utgångspunkt i det arbete som utfördes på 1700-talet av Daniel Bernoulli. I hans verk "Hydrodynamica", publicerat 1738, återfinns den ekvation som numera går under benämningen *Bernoullis ekvation*. Även om det är en förenkling av verkligheten, eftersom den inte tar hänsyn till de förluster som uppstår på grund av inre friktion i fluiden (se kapitel 5), utgör den ändå grunden för i stort sett alla strömningstekniska beräkningar.



Figur 12. Energiflödet genom ett öppet system bestående av en rörsektion begränsad av två tvärsnitt. Vid stationärt flöde är energin i tvärsnitt 1 lika med energin i tvärsnitt 2, förutsatt att vi inte har några förluster i systemet.

4.1 Uppställning av Bernoullis ekvation

Om vi återigen betraktar ett öppet system med ett inlopp och ett utlopp, t.ex. en del av ett rör (se figur 12), kan vi ta fram den enklaste formen av Bernoullis ekvation. Den totala energin hos en fluid kan uttryckas som summan av flera olika energiformer. Många energiformer är ointressanta, antingen för att de ger ett försumbart bidrag till summeringen, eller för att de inte ändras nämnvärt, så det är bara några viktiga former som man måste ta hänsyn till. Om det inte förekommer fasomvandlingar eller temperaturändringar, kan förändringar i den inre

energin i fluiden försummas vid beräkningar på en strömmande fluid. I normala fall är det främst *lägesenergi*, *rörelseenergi* och *tryckenergi* som är relevanta. Dessa kan uttryckas för en bestämd mängd av fluiden enligt följande:

Potentiell energi eller lägesenergi

Det är det arbete som krävs för att lyfta upp fluiden med massan m kg från en referensnivå med energin 0, till höjden h m. Med tyngdaccelerationen, g m/s², fås detta arbete till

$$m \cdot g \cdot h \quad \text{joule (J)}$$

Kinetisk energi eller rörelseenergi

Det är det arbete som krävs för att sätta fluiden i rörelse från stillastående till hastigheten v m/s. Detta arbete är

$$m \cdot \frac{v^2}{2} \quad \text{joule (J)}$$

Tryckenergi

Detta representerar det arbete som i varje tillfälle skulle krävas eller frigöras för att införa fluiden i röret (systemet) utan att förändra dess volym. Detta är ett tryck-volym-arbete (in- eller utpressningsarbete, *flow work*) och kan skrivas som

$$p \cdot V = p \cdot \frac{m}{\rho} \quad \text{joule (J)}$$

Om vi nu antar att det är *stationärt flöde*, d.v.s. en konstant mängd flödar igenom systemet, och att det inte förekommer några förluster i systemet, d.v.s. att strömningen är *friktionsfri*, måste då också den energi som följer med flödet vara konstant, och vi kan sätta upp en energibalans över systemet med hjälp av ovanstående energiuttryck:

$$m \cdot g \cdot h_1 + m \cdot \frac{v_1^2}{2} + p_1 \cdot \frac{m}{\rho_1} = m \cdot g \cdot h_2 + m \cdot \frac{v_2^2}{2} + p_2 \cdot \frac{m}{\rho_2} \quad [22]$$

För vätskor gäller att även *inkompressibelt flöde* kan antas, d.v.s. att densiteten är konstant, och vi får då istället:

$$m \cdot g \cdot h_1 + m \cdot \frac{v_1^2}{2} + p_1 \cdot \frac{m}{\rho} = m \cdot g \cdot h_2 + m \cdot \frac{v_2^2}{2} + p_2 \cdot \frac{m}{\rho} \quad [23]$$

Samtliga termer ovan har enheten för energi, joule (J) eller newtonmeter (N·m). Multiplieras varje term med kvoten ρ/m (vilket är detsamma som att dividera med volymen för fluiden), erhålls följande samband

$$\rho \cdot g \cdot h_1 + \rho \cdot \frac{v_1^2}{2} + p_1 = \rho \cdot g \cdot h_2 + \rho \cdot \frac{v_2^2}{2} + p_2 \quad [24]$$

Samtliga termer i ovanstående samband har enheten för tryck, Pa eller N/m². De brukar benämnas *höjdtryck*, *dynamiskt tryck* och *statiskt tryck* i den ordning de står här (se kapitel 2.3). Divideras varje term ovan med produkten $\rho \cdot g$ erhålls

$$h_1 + \frac{v_1^2}{2 \cdot g} + \frac{p_1}{\rho \cdot g} = h_2 + \frac{v_2^2}{2 \cdot g} + \frac{p_2}{\rho \cdot g} \quad [25]$$

Här har samtliga termer enheten för längd, m. Här brukar man tala om begreppet *uppforderingshöjd*, vilket kommer sig av att en vanlig tillämpning av strömning förr var att pumpa upp (uppfordra) vatten ur brunnar. Ibland används det förkortade begreppet *höjd*. De ingående termerna kallas, i ovanstående ordning, *geodetisk* (eller *geometrisk*) *höjd* (d.v.s. "vanlig" höjd), *hastighetshöjd* och *statisk tryckhöjd*. Benämningen på den sista termen ska inte blandas ihop med begreppet *statisk uppforderingshöjd*, som är en sammanslagning av den statiska tryckhöjden och den geodetiska höjden, de energiformer som inte beror på flödet genom systemet (statisk = oberoende av flödet).

Alla tre ekvationerna ovan kallas för *Bernoullis ekvation*. Skillnaden mellan dem är bara att ingående termer har olika enheter, J, Pa eller m. Som nämnts gäller denna ekvation bara om flödet är:

- **stationärt**
- **inkompressibelt**
- **friktionsfritt**

De vanligaste formerna av Bernoullis ekvation är de två senare, den med trycktermer (ekvation [24]) och den med höjdtermer (ekvation [25]). För allmän strömningslära är trycktermer det vanligaste sättet, men inom vissa specifika områden, t.ex. i pumpbranschen, är det höjdtermer som är det dominerande sättet att presentera ekvationen. I denna framställning kommer nästan uteslutande formen med trycktermer att användas.

4.2 Härledning av Bernoullis ekvation med hjälp av termodynamikens första huvudsats

Med utgångspunkt från termodynamikens första huvudsats, och med förutsättningarna enligt ovan att strömningen sker stationärt, inkompressibelt och förlustfritt, kan man visa att Bernoullis ekvation inte är något annat än ett specialfall av en energibalans för ett öppet system.

Om vi betraktar en rörsektion som ett öppet system med ett inflöde och ett utflöde (se figur 12), ger första huvudsatsen för stationärt flöde med specifika enheter:

$$q - w = \Delta i + \Delta k.e. + \Delta p.e. \quad \Rightarrow$$

$$q - w + i_1 + \frac{v_1^2}{2} + g \cdot h_1 = i_2 + \frac{v_2^2}{2} + g \cdot h_2 \quad [26]$$

(Här används beteckningen i för entalpi, för att inte förväxla den med h för höjd.) Med definitionen för entalpi fås:

$$i = u + p \cdot v \quad \Rightarrow \quad q - w + u_1 + p_1 \cdot v_1 + \frac{v_1^2}{2} + g \cdot h_1 = u_2 + p_2 \cdot v_2 + \frac{v_2^2}{2} + g \cdot h_2 \quad [27]$$

(Lägg märke till att v betecknar specifik volym, m^3/kg , till skillnad från v som betecknar hastighet!) I rörsektionen utförs inget arbete, så $w = 0$. Kvar finns ändå termer med värmeöverföring q och inre energi u . För att hantera dessa kan vi byta perspektiv ett tag. Om vi betraktar en konstant fluidmängd som passerar genom rörsektionen har vi ett slutet system (fluidmängden). Om strömningen är förlustfri, måste värmeöverföringen från detta system vara detsamma som för en reversibel process, d.v.s.

$$q = q_{rev} = \int_1^2 T \cdot ds \quad [28]$$

För ett slutet system gäller

$$T \cdot ds = du + p \cdot dv \Rightarrow q = \int_1^2 (du + p \cdot dv) = \int_1^2 du + \int_1^2 p \cdot dv \quad [29]$$

Om vi har en inkompressibel fluid är $dv = 0$, vilket ger

$$q = \int_1^2 du = u_2 - u_1 \quad [30]$$

Insättning av ekvation [30] i ekvation [27] ger nu

$$\begin{aligned} u_2 - u_1 + u_1 + p_1 \cdot v_1 + \frac{v_1^2}{2} + g \cdot h_1 &= u_2 + p_2 \cdot v_2 + \frac{v_2^2}{2} + g \cdot h_2 \Rightarrow \\ p_1 \cdot v_1 + \frac{v_1^2}{2} + g \cdot h_1 &= p_2 \cdot v_2 + \frac{v_2^2}{2} + g \cdot h_2 \end{aligned} \quad [31]$$

Denna ekvation kan lätt överföras till ekvation [24] genom division med specifika volymen v (vilket är detsamma som multiplikation med densiteten ρ), d.v.s. det är en annan form av Bernoullis ekvation.

4.3 Användning av Bernoullis ekvation

En energibalans med hjälp av Bernoullis ekvation kan användas på flera sätt för att få fram önskad information om strömningen. Hur användbar ekvationen blir, beror mycket på vilket system betraktas. Detta väljs lämpligen så att *systemgränserna*, d.v.s. de tvärsnitt som strömningen sker genom, på ett så bra sätt som möjligt använder tillgänglig information och samtidigt ger möjlighet att bestämma den önskade informationen. Det är också eftersträvaransvärt att välja systemgränser som ger så enkla samband som möjligt, d.v.s. där så många som möjligt av termerna ska vara försumbara.

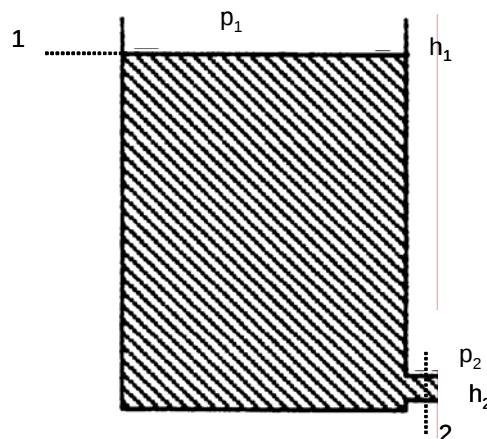
Vätskeytor kan ofta vara lämpliga som systemgränser, eftersom det statiska trycket där är lika med lufttrycket (eller gastrycket) ovanför ytan. Är ytan tillräckligt stor, t.ex. i en tank eller annan stor behållare, är strömningshastigheten i ytan oftast försumbar.

Utlopp från rör, eller liknande, är också lämpliga i många sammanhang, eftersom det statiska trycket där är lika med omgivningens lufttryck, och att strömningshastigheten fortfarande går att bestämma med hjälp av kontinuitetsekvationen om utloppets diameter är känd.

Om referensen för höjdtermerna inte bestäms av andra anledningar, är det lämpligt att välja den lägsta av höjderna som referens. Detta innebär att den ena termen försvinner, eftersom referenshöjden alltid sätts till 0.

Exempel 2

I en öppen tank, fylld med vatten, finns en öppning genom vilken vattnet strömmar ut (se figur 13). Nivån på vattenytan i tanken ligger 3 m över öppningen. Hur hög blir hastigheten på det utströmmande vattnet, om strömningen är förlustfri? Vad skulle hastigheten bli om tanken istället var fylld med trögflytande olja?



Figur 13. Val av systemgränser och beteckningar vid utflöde från en tank.

Lösning:

Det mest naturliga valet av systemgränser är vattenytan i tanken och ett tvärsnitt precis utanför öppningen. Bernoullis ekvation ([24]) blir

$$\rho \cdot g \cdot h_1 + \rho \cdot \frac{v_1^2}{2} + p_1 = \rho \cdot g \cdot h_2 + \rho \cdot \frac{v_2^2}{2} + p_2$$

I detta uttryck kan nu försumningar göras:

Vid tankens yta är hastigheten försumbar $\Rightarrow v_1 = 0$

Vid ytan i tanken är det samma tryck som vid utloppet, eftersom tanken är öppen

$$\Rightarrow p_1 = p_2$$

Höjden vid öppningen väljs som referens $\Rightarrow h_2 = 0$ och $h_1 = 3$ m

Vi får nu

$$\rho \cdot g \cdot h_1 = \rho \cdot \frac{v_2^2}{2}$$

Division med densiteten ger

$$g \cdot h_1 = \frac{v_2^2}{2} \Rightarrow v_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_1} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 3} = 7,7 \text{ m/s}$$

I och med att uttrycket ovan är oberoende av densiteten blir resultatet detsamma för både vattnet och den trögflytande oljan.

Svar: Strömningshastigheten i öppningen blir 7,7 m/s (för både vatten och olja).

I exemplet ovan kan man se en av svagheter med Bernoullis synsätt, d.v.s. att strömning sker förlustfritt. Att trögflytande olja skulle rinna ut lika snabbt som vatten, är ju något som motsägs av vår egen erfarenhet (eller ett lätt utfört experiment). Det hindrar inte att Bernoullis ekvation ändå är mycket användbar, främst på grund av att den ger ett bra grepp om vilka parametrar som spelar störst roll vid strömningen. Genom modifiering av den, kan även inverkan av förluster tas med (se kapitel 8).