

Svar eller ofullständiga lösningar till
TENTAMEN I FLERVARIABELANALYS FÖR I2 MVE270

Lördag 13 mars 2021 kl 8.30 – 12.30

1. Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan $x^2z - 2xy - y^2 + z = 0$ i punkten $(0, -1, 1)$ (2p)

Lösning: bilda $w = x^2z - 2xy - y^2 + z$ så att ytan blir en nivåyta.

Eftersom $\nabla w = (2xz - 2y, -2x - 2y, x^2 + 1) = (2, 2, 1)$ i den aktuella punkten blir tangentplanet: $2x + 2(y + 1) + z - 1 = 0$

2. Bestäm största och minsta värde till funktionen $f(x, y) = x + 2y$ på kurvan $x^2 + 4y^2 = 8$ (3p)

Lösning: om vi betraktar kurvan som ett bivillkor (området är kompakt) skall vi leta efter punkter där $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ x & 4y \end{vmatrix} = 0$, dvs $x = 2y$.

Tillsammans med kurvans ekvation får vi punkterna $\pm(2, 1)$, så största och minsta värde är 4 respektive -4.

3. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D \frac{dx dy}{1+y^4}$ där området D beskrivs av olikheterna $\begin{cases} 0 \leq x \leq 8 \\ \sqrt[3]{x} \leq y \leq 2 \end{cases}$ genom att kasta om

integrationsordningen. (4p)

Lösning: en ny beskrivning blir $\begin{cases} 0 \leq x \leq y^3 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$ som gör att dubbelintegralen

$$\text{blir} = \int_0^2 \frac{y^3}{1+y^4} dy = \frac{\ln 17}{4}$$

4. Beräkna kurvintegralen $\int_{\gamma} F dr$ där

$$F = (2xy + z^2, x^2, 2xz + \pi \cos(\pi z))$$

$$\text{och } \gamma \text{ är kurvan } \begin{cases} x = t \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) \\ y = t^2 + 1 \\ z = t^3 \end{cases}, 0 \leq t \leq 1 \quad (4p)$$

Lösning: F är konservativt med potential $U(x, y, z) = yx^2 + xz^2 + \sin(\pi z)$

$$\text{Alltså är } \int_{\gamma} F dr = U(1, 2, 1) - U(0, 1, 0) = 3$$

5. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D \sin(x + y) \cos(x - y) dx dy$ där

$$D \text{ är området innanför kurvan } |x| + |y| = 1 \quad (5p)$$

Lösning: vi byter variabler, $\begin{cases} s = x + y \\ t = x - y \end{cases}$ och får en ny dubbelintegral,

$$\iint_{\substack{-1 \leq s \leq 1 \\ -1 \leq t \leq 1}} \sin s \cos t \frac{1}{2} ds dt = 0 \text{ eftersom sinus är udda.}$$

(Funktionaldeterminanten blir $= \frac{1}{2}$)

6. Om $s_1, s_2, \dots, s_n$ är positiva tal definierar man det aritmetiska medelvärdet $A = \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_n}{n}$ och det geometriska

$$G = (s_1 \cdot s_2 \cdot \dots \cdot s_n)^{\frac{1}{n}}$$

Visa olikheten $A \geq G$ då $n = 3$ genom att bestämma det största värdet av uttrycket $x^2 y^2 z^2$ på sfären $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. (6p)

Lösning: Sfären utgör ett kompakt område så vi söker punkter med parallella gradienter. Sätt $f = x^2 y^2 z^2$ och $h = x^2 + y^2 + z^2$

Vi får då systemet

$$\begin{cases} xy^2z^2 = \lambda x \\ x^2yz^2 = \lambda y \\ x^2y^2z = \lambda z \end{cases} \quad (\text{tillsammans med sfären}). \text{ Om någon av variablerna är } 0 \text{ blir } f = 0$$

som är ett uppenbart minimum. Vi kan alltså anta att $xyz \neq 0$. Genom till exempel ledvis division får vi då $x^2 = y^2 = z^2$ som alla måste vara $= \frac{r^2}{3}$.

Alltså gäller $x^2y^2z^2 \leq \left(\frac{r^2}{3}\right)^3 = \left(\frac{x^2+y^2+z^2}{3}\right)^3$ vilket är den efterfrågade olikheten.

7. Bestäm flödet av fältet $F = (y^2 + xz, x^3 + yz, z^3 - z^2 + 1)$ ner genom ytan $x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0$ **(6p)**

Lösning: vi lägger till en yta L så att vi kan använda divergenssatsen. Om L är $x^2 + y^2 \leq 4, z = 0$ blir "L+Y", där Y är den givna halvsfären, en sluten yta och $\iint_{Y+L} F \cdot NdS = \iiint_E \operatorname{div} F dV = \iiint_E 3z^2 dV$ där E är halvklotet innanför L+Y och normalen pekar utåt.

$$\begin{aligned} \text{Med rymdpolära koordinater: } \iiint_E 3z^2 dV &= \iiint_{\substack{0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \varphi < 2\pi}} 3r^4 \cos^2 \theta \sin \theta dr d\theta d\varphi = \\ &= \frac{64\pi}{5} \text{ eftersom } \int 3 \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = -\cos^3 \theta \end{aligned}$$

På L är $N = (0, 0, -1)$ så $F \cdot N = -1$ (eftersom $z = 0$ på L) och $\iint_L F \cdot NdS = -4\pi$. Vi får nu $\iint_Y F \cdot NdS = \frac{64\pi}{5} + 4\pi = \frac{84\pi}{5}$.

Detta är flöde uppåt genom sfären så flöde neråt blir $= -\frac{84\pi}{5}$

8. Beräkna kurvintegralen $\int_C (y + \sin(x^2))dx + (2x + e^y)dy$ där C är kurvan $x = 1 - y^2$ genomlöpt från punkten (0,1) till punkten (0,-1) **(6p)**

Lösning: vi lägger till K, linjestycket från (0,1) och (0,-1) så att vi får en sluten positivt orienterad kurva "K-C". Greens formel ger då (med naturliga beteckningar)

$$\int_{K-C} Pdx + Qdy = \iint_D 2 - 1 dxdy \text{ där D är området innanför den slutna kurvan.}$$

$$\iint_D dxdy = \int_{-1}^1 (1 - y^2) dy = 4/3 \text{ och } \int_K Pdx + Qdy = \int_1^{-1} e^y dy = \frac{1}{e} - e$$

Vi får $\int_{-C} Pdx + Qdy = \frac{4}{3} - \frac{1}{e} + e$ så med rätt orientering blir

$$\int_C Pdx + Qdy = \frac{1}{e} - e - 4/3$$

9. Låt a och b vara positiva tal och $\max(x, y)$ vara det största av talen x och y .

Beräkna dubbelintegralen $\iint_D e^{\max(b^2x^2, a^2y^2)} dx dy$ där D är

$$\text{området } \begin{cases} 0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq b \end{cases}$$

Ledning: dela upp området D på lämpligt sätt

(7p)

Lösning: Vi delar upp D i två delområden S och T där S är delen under linjen $y = \frac{bx}{a}$

$$\text{Då blir } \iint_D e^{\max(b^2x^2, a^2y^2)} dx dy = \iint_S e^{b^2x^2} dx dy + \iint_T e^{a^2y^2} dx dy$$

Eftersom S kan beskrivas: $\begin{cases} 0 \leq y \leq \frac{bx}{a} \\ 0 \leq x \leq a \end{cases}$ blir $\iint_S e^{b^2x^2} dx dy = \int_0^a \frac{bx}{a} e^{b^2x^2} dx =$
 $= \frac{1}{2ab} (e^{a^2b^2} - 1)$. Integralen över T beräknas på samma sätt och får samma värde.

$$\text{Svaret blir } \iint_D e^{\max(b^2x^2, a^2y^2)} dx dy = \frac{1}{ab} (e^{a^2b^2} - 1)$$

10. Bestäm, om sådana finns, största och minsta värde

till $f(x, y) = 6xye^{-(2x+3y)}$ i första kvadranten,

alltså området $x \geq 0, y \geq 0$.

(7p)

Lösning: Området är inte kompakt men eftersom $f \geq 0$ ser vi direkt att $f(0,0) = 0$ är minsta värde. För att bestämma största värde drar vi en linje $2x + 3y = C$ i första kvadranten för något stort C och konstaterar att på den linjen är $f \leq 6C^2e^{-C}$ som går mot 0 då C går mot oändligheten. Om vi därför hittar ett största värde till f på det kompakta området $x \geq 0, y \geq 0, 2x + 3y \leq C$ kommer det också att vara största värde på hela första kvadranten eftersom vi kan få f godtyckligt nära 0 bara vi väljer C tillräckligt stort. $f = 0$ på axlarna så det räcker att bestämma stationära punkter: $f'_x = 6ye^{-2x-3y}(1-2x)$ och $f'_y = 6xe^{-2x-3y}(1-3y)$

Alltså är största värde $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = e^{-2}$