Övningar (med vissa lösningar) MVE100 Avsnitt 3 (F7-F10)

Erik I. Broman

3 februari 2021

1 Inledning

Följande kommandon i Matlab/Mathematica kan vara bra att känna till (använd hjälpfunktionen i Matlab/Mathematica eller googla för detaljerad info).

(I) *fourier och ifourier* Beräknar fouriertransformer och deras invers i Matlab.

(II) *Convolve* Kan användas i Mathematica för att beräkna faltningar.

(III) *FourierTransform* Beräknar fouriertransformer i Mathematica. Jag vill dock varna för detta kommando (se lösningen av Övning 2).

1.1 Fouriertransform

1. **(Lösning finnes)** (Detta är Tal 1 i (GJ) 8.2.4) Låt

$$f(t) = e^{-a|t|} \text{ där } a > 0.$$

Beräkna Fouriertransformen av $f(t)$.

2. **(Lösning finnes)** Visa att

$$\mathcal{F}\{\cos(t+a)\}(j\omega) = \pi e^{ja}\delta(\omega - 1) + \pi e^{-ja}\delta(\omega + 1).$$

1.2 Faltningar och filter

3. **(Lösning finnes)** Låt

$$f(s) = (\sin(t) * (H(t+1) - H(t-2)))(s).$$

(a) Beräkna faltningen i uttrycket för $f(t)$.

(b) Beräkna $F(j\omega)$ med hjälp av ditt svar i (a).

(c) Beräkna $F(j\omega)$ genom att använda dig av faltningsformeln för Fouriertransformer.

4. **(Lösning finnes)**

   (a) Bestäm (med egen räkning) den funktion $f(t)$ som är sådan att

   $$F(j\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}(j\omega) = (1 - \omega^2)(H(\omega + 1) - H(\omega - 1)).$$

   (b) Antag att du har en insignal på formen

   $$g(t) = \frac{\sin(2t)}{2} + \sin(t) + 2\sin(t/2) + 3\sin(t/3).$$

   Vad blir utsignalen om du använder funktionen i (a) som ett filter?
   Tips: Vi söker alltså

   $$h(t) = (f * g)(t),$$

   vilket enklast räknas ut med hjälp av Fouriertransform.

5. Gör om Övning 4 med funktionen

   $$F(j\omega) = (a^2 - \omega^2)(H(\omega + a) - H(\omega - a)),$$

   där $a > 0$. Vad ändras?

6. Gör om Övning 4 med funktionen

   $$F(j\omega) = (1 - \omega^{2n})(H(\omega + 1) - H(\omega - 1)).$$

   Vad ändras? **Tips:** Om det blir för svårt att lösa för allmänna värden på n, testa med $n = 2$.

1.3 Lösningar

Lösning av Övning 1: Vi har att

$$
\begin{aligned}
F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|}e^{-j\omega t}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(a+j\omega)t}dt + \int_{-\infty}^{0} e^{(a-j\omega)t}dt \\
&= \left[\frac{e^{-(a+j\omega)t}}{-(a+j\omega)}\right]_0^{\infty} + \left[\frac{e^{(a-j\omega)t}}{a-j\omega}\right]_{-\infty}^{0} = \frac{1}{a+j\omega} + \frac{1}{a-j\omega} = \frac{2a}{a^2+\omega^2}.
\end{aligned}
$$

Lösning av Övning 2: Det enklaste är att verifiera detta genom att utnyttja sambandet

$$
\mathcal{F}^{-1}\left\{\mathcal{F}\{\cos(t+a)\}(j\omega)\right\} = \cos(t+a)
$$

och att

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}\left\{F(j\omega)\right\} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left(\pi e^{ja}\delta(\omega-1) + \pi e^{-ja}\delta(\omega+1)\right) e^{j\omega t}d\omega \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{ja+jt} + e^{-ja-jt}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{j(t+a)} + e^{-j(t+a)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\cos(t+a) + j\sin(t+a) + \cos((t+a)) - j\sin(t+a)\right) = \cos(t+a),
\end{aligned}
$$

vilket är korrekt.

Om man har tillgång till programvara är det alltid en bra ide att kontrollera sitt svar. Enligt Matlab så är

```
syms t a
fourier(cos(t+a))
>>pi*(dirac(w - 1)*exp(a*1i) + dirac(w + 1)*exp(-a*1i))
```

I Mathematica så ger kommandot

```
FourierTransform[Cos[s + a], s, t]
```

svaret

$$
\mathcal{F}\{\cos(s+a)\}(j\omega) = e^{ja}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\delta(t-1) + e^{-ja}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\delta(t+1).
$$

Vi noterar att vårt svar är samma som Matlabs, men Mathematicas svar skiljer sig. Vad är fel?

Problemet ligger i att det finns många olika möjliga sätt att definiera Fouriertransformen. Vi sådana tillfällen måste man kolla i hjälpfunktionen. Där ser vi att Mathematica använder definitionen

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega t}dt,$$

vilket skiljer sig från kursens definition både på konstanten framför integralen och på tecknet i exponentialfunktionen.

Lösning av Övning 3:

(a) Vi har att

$$\begin{aligned}
&(\sin(t) * (H(t+1) - H(t-2)))(s) = ((H(t+1) - H(t-2)) * \sin(t))(s) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (H(\tau+1) - H(\tau-2)) \sin(s-\tau)d\tau = \int_{-1}^{2} \sin(s-\tau)d\tau \\
&= [\cos(s-\tau)]_{-1}^{2} = \cos(s-2) - \cos(s+1).
\end{aligned}$$

(b) Vi ser att

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{\cos(t-2) - \cos(t+1)\} = \mathcal{L}\{\cos(t-2)\} - \mathcal{L}\{\cos(t+1)\} \\
&= \pi e^{-2j}\delta(\omega-1) + \pi e^{2j}\delta(\omega+1) - \pi e^{j}\delta(\omega-1) - \pi e^{-j}\delta(\omega+1) \\
&= \pi\delta(\omega-1)\left(e^{-2j} - e^{j}\right) + \pi\delta(\omega+1)\left(e^{2j} - e^{-j}\right),
\end{aligned}$$

där vi använder oss av svaret i Övning 2.

(c) Enligt faltningsformeln så är

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{\sin(t)\}\mathcal{L}\{H(t+1) - H(t-2)\} \\
&= (-j\pi(\delta(\omega-1) + \delta(\omega+1))) \int_{-\infty}^{\infty} (H(t+1) - H(t-2))e^{-j\omega t}dt \\
&= (-j\pi(\delta(\omega-1) + \delta(\omega+1))) \int_{-1}^{2} e^{-j\omega t}dt \\
&= (-j\pi(\delta(\omega-1) + \delta(\omega+1))) \left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_{-1}^{2} \\
&= \pi(\delta(\omega-1) + \delta(\omega+1))\frac{e^{-2j\omega} - e^{j\omega}}{\omega}.
\end{aligned}$$

Kan detta verkligen stämma? Ja, ty

$$\delta(\omega-1)\frac{e^{-2j\omega} - e^{j\omega}}{\omega} = \delta(\omega-1)\frac{e^{-2j} - e^{j}}{1} = \delta(\omega-1)\left(e^{-2j} - e^{j}\right),$$

etc.

Lösning av Övning 4:

(a) Vi har att

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}\{F(j\omega)\} &= \mathcal{F}^{-1}\{(1-\omega^2)(H(\omega+1)-H(\omega-1))\} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(1-\omega^2)(H(\omega+1)-H(\omega-1))e^{j\omega t}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}(1-\omega^2)e^{j\omega t}d\omega = \cdots = \frac{2}{\pi t^3}\left(\sin(t) - t\cos(t)\right).
\end{aligned}$$

(b) Vi löser detta med hjälp av Fouriertransform. Vi har att

$$\mathcal{F}\{h(t)\} = F(j\omega)G(j\omega),$$

och vidare är $\mathcal{F}\{\sin(at)\} = j\pi(\delta(\omega+a) - \delta(\omega-a))$ så att

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(g(t)) = {} & \frac{j\pi(\delta(\omega+2)-\delta(\omega-2))}{2} + j\pi(\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)) \\
& +2j\pi(\delta(\omega+1/2)-\delta(\omega-1/2)) + 3j\pi(\delta(\omega+1/3)-\delta(\omega-1/3)).
\end{aligned}$$

Då $F(j\omega)$ har begränsad bandbredd ser vi att

$$\begin{aligned}
& F(j\omega)G(j\omega) \\
&\quad = (1-\omega^2)\left(2j\pi(\delta(\omega+1/2)-\delta(\omega-1/2)) + 3j\pi(\delta(\omega+1/3)-\delta(\omega-1/3))\right) \\
&\quad = \frac{3}{2}j\pi(\delta(\omega+1/2)-\delta(\omega-1/2)) + \frac{8}{3}j\pi(\delta(\omega+1/3)-\delta(\omega-1/3)),
\end{aligned}$$

och därmed blir

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(j\omega)G(j\omega)\} = \frac{3\sin(t/2)}{2} + \frac{8\sin(t/3)}{3}.$$