

Tentamentsskrivning i **Transformer och differentialekvationer MVE100**

Tentamen består av 6 frågor om sammanlagt 50 poäng. Preliminära betygsgränser är satta till:

- betyg "3": 20 till 29.5 poäng
betyg "4": 30 till 39.5 poäng
betyg "5": 40 eller fler poäng.
-

OBS! Alla lösningar skall vara väl redovisade och motiverade. Talen är ej ordnade efter svårighetsgrad

1. Beräkna e^{At} om

(a) (4p)

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) (4p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

2. Betrakta följande ekvation för $t > 0$,

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = u(t),$$

med begynnelsevillkoren $y(0) = \dot{y}(0) = 0$.

- (a) Hitta överföringsfunktionen och impulssvaret. Är systemet stabilt?
(4p)

- (b) Lös ekvationen med hjälp av Laplace-transform om $u(t) = \sin(\sqrt{3}t)$.
OBS! En faltningsrepresentation är ej tillräcklig. (6p)

3. Låt $f(t) = t^2$ och låt sedan

$$\phi(t) = \begin{cases} f(t) & \text{om } -1 \leq t \leq 1 \\ f(t+2) = f(t) & \text{för alla andra } t. \end{cases}$$

Notera att $\phi(t)$ är den periodiska utvidgningen av $f(t)$ från $[-1, 1]$ till hela $\mathbb{R}$. Bestäm Fourierserien till $f(t)$. (8p)

4. Betrakta värmeledningsekvationen i en stav av längd 1: (8p)

$$\dot{u}(x, t) = ku''_{xx}(x, t)$$

där k är en konstant och $x \in [0, 1]$. Använd Fouriers metod (dvs variabelseparation) för att bestämma den allmänna lösningen till denna PDE om vi har randvillkoren

$$u(0, t) = u'_x(1, t) = 0$$

och begynnelsevillkoret

$$u(x, 0) = f(x)$$

5. Hitta övre och undre begränsningar till alla egenvärdena för följande egenvärdesproblem: (8p)

$$-D[(2x+1)u'(x)] = \lambda(x^2+2)u(x) \text{ på } x \in [0, 1],$$

med randvillkoren

$$\begin{aligned} u'(0) &= 0 \\ u'(1) &= 0 \end{aligned}$$

6. Betrakta systemet (8p)

$$\begin{aligned} 4\ddot{x}_1(t) + x_1(t) + x_2(t) &= 0 \\ \ddot{x}_1(t) + \ddot{x}_2(t) + x_1(t) &= 0. \end{aligned}$$

- (a) Skriv om detta på "diagonal" form och bestäm diagonalmatrisen.
(b) Använd svaret i (a) för att hitta $x_1(t)$ och $x_2(t)$ om

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ och } \dot{\mathbf{x}}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$