

Tentamentsskrivning i **Transformer och differentialekvationer MVE100**

Tentamen består av 6 frågor om sammanlagt 50 poäng. Preliminära betygsgränser är satta till:

- betyg "3": 20 till 29.5 poäng
 betyg "4": 30 till 39.5 poäng
 betyg "5": 40 eller fler poäng.
-

OBS! Alla lösningar skall vara väl redovisade och motiverade. Talen är ej ordnade efter svårighetsgrad

1. Beräkna e^{At} om

(a) (4p)

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) (4p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Lösning

- (a) Den karakteristiska ekvationen är

$$\det(A - \lambda I) = (5 - \lambda)(1 - \lambda) + 3 = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda - 2)(\lambda - 4).$$

Det enklaste är att använda Cayley-Hamiltons sats som ger att

$$e^{At} = \alpha_0 I + \alpha_1 A,$$

där α_0, α_1 bestäms av sambanden

$$\begin{aligned} e^{4t} &= \alpha_0 + 4\alpha_1 \\ e^{2t} &= \alpha_0 + 2\alpha_1 \end{aligned}$$

så att

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 2e^{2t} - e^{4t} \\ \alpha_1 &= \frac{e^{4t} - e^{2t}}{2} \end{aligned}$$

och till slut blir då

$$\begin{aligned} e^{At} &= (2e^{2t} - e^{4t})I + \frac{e^{4t} - e^{2t}}{2}A \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4e^{2t} - 2e^{4t} & 0 \\ 0 & 4e^{2t} - 2e^{4t} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 5(e^{4t} - e^{2t}) & -3(e^{4t} - e^{2t}) \\ e^{4t} - e^{2t} & e^{4t} - e^{2t} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e^{4t} - e^{2t} & 3e^{2t} - 3e^{4t} \\ e^{4t} - e^{2t} & 3e^{2t} - e^{4t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(b) Den karakteristiska ekvationen är

$$\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)(5 - \lambda) + 4 = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2.$$

Då $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ använder vi Cayley-Hamiltons "med derivata", dvs

$$e^{3t} = \alpha_0 + 3\alpha_1$$

och

$$te^{3t} = \alpha_1.$$

Vi får att

$$\alpha_0 = (1 - 3t)e^{3t}.$$

Vidare blir då

$$\begin{aligned} e^{At} &= (1 - 3t)e^{3t}I + te^{3t}A \\ &= (1 - 3t) \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} e^{3t} & 4e^{3t} \\ -e^{3t} & 5e^{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - 2t)e^{3t} & 4te^{3t} \\ -te^{3t} & (2t + 1)e^{3t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2. Betrakta följande ekvation för $t > 0$,

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = u(t),$$

med begynnelsevillkoren $y(0) = \dot{y}(0) = 0$.

(a) Hitta överföringsfunktionen och impulssvaret. Är systemet stabilt?
(4p)

(b) Lös ekvationen med hjälp av Laplace-transform om $u(t) = \sin(\sqrt{3}t)$.
OBS! En faltningsrepresentation är ej tillräcklig. (6p)

Lösning:

(a) Med hjälp av begynnelsevillkoren ser vi att

$$\mathcal{L}(\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t)) = s^2Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) = Y(s)(s^2 + 3s + 2) = Y(s)(s+1)(s+2)$$

och vi vet att $\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$. Överföringsfunktionen blir därför

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}.$$

Då polerna ligger i vänstra halvplanet är systemet stabilt.

Impulssvaret blir enligt tabell

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}(G(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}\right) = e^{-t} - e^{-2t}$$

(b) Enligt tabell är

$$\mathcal{L}(\sin(\sqrt{3}t)) = \frac{\sqrt{3}}{s^2 + 3}$$

medans återigen

$$\mathcal{L}(\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t)) = s^2Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) = Y(s)(s^2 + 3s + 2) = Y(s)(s+1)(s+2)$$

där vi har använt begynnelsevillkoren. Vi får då att

$$Y(s) = \frac{\sqrt{3}}{s^2 + 3} \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{\sqrt{3}}{s^2 + 3} \left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \right).$$

Vidare är

$$\frac{\sqrt{3}}{s^2 + 3} \frac{1}{s+1} = \frac{As + B}{s^2 + 3} + \frac{C}{s+1}$$

och identifiering ger $A = -B = -C = -\sqrt{3}/4$ så att

$$\frac{\sqrt{3}}{s^2 + 3} \frac{1}{s+1} = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{-s+1}{s^2 + 3} + \frac{1}{s+1} \right)$$

och på liknande sätt blir

$$\frac{\sqrt{3}}{s^2 + 3} \frac{1}{s+2} = \frac{\sqrt{3}}{7} \left(\frac{-s+2}{s^2 + 3} + \frac{1}{s+2} \right).$$

Vi får då att

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}(Y(s)) &= \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{-s+1}{s^2 + 3} + \frac{1}{s+1} \right) + \frac{\sqrt{3}}{7} \left(\frac{-s+2}{s^2 + 3} + \frac{1}{s+2} \right) \right) \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{4} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{s}{s^2 + 3} \right) + \frac{1}{4} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}}{s^2 + 3} \right) + \frac{\sqrt{3}}{4} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s+1} \right) \\ &\quad + \frac{\sqrt{3}}{7} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{s}{s^2 + 3} \right) - \frac{2}{7} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}}{s^2 + 3} \right) - \frac{\sqrt{3}}{7} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s+2} \right) \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{4} \cos(\sqrt{3}t) + \frac{1}{4} \sin(\sqrt{3}t) + \frac{\sqrt{3}}{4} e^{-t} + \frac{\sqrt{3}}{7} \cos(\sqrt{3}t) - \frac{2}{7} \sin(\sqrt{3}t) - \frac{\sqrt{3}}{7} e^{-2t} \\ &= -\frac{3\sqrt{3}}{28} \cos(\sqrt{3}t) - \frac{1}{28} \sin(\sqrt{3}t) + \frac{\sqrt{3}}{4} e^{-t} - \frac{\sqrt{3}}{7} e^{-2t}. \end{aligned}$$

3. Låt $f(t) = t^2$ och låt sedan

$$\phi(t) = \begin{cases} f(t) & \text{om } -1 \leq t \leq 1 \\ f(t+2) = f(t) & \text{för alla andra } t. \end{cases}$$

Notera att $\phi(t)$ är den periodiska utvidgningen av $f(t)$ från $[-1, 1]$ till hela $\mathbb{R}$. Bestäm Fourierserien till $f(t)$. (8p)

Lösning: Vi har att

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\pi t}$$

då $\omega_0 = 2\pi/T = \pi$. Vidare är

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 t^2 e^{-jk\pi t} dt = \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^0 t^2 e^{-jk\pi t} dt + \frac{1}{2} \int_0^1 t^2 e^{-jk\pi t} dt \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 t^2 (e^{-jk\pi t} + e^{jk\pi t}) dt = \int_0^1 t^2 \cos(k\pi t) dt \\ &= \left[\frac{t^2 \sin(k\pi t)}{k\pi} \right]_0^1 - \frac{2}{k\pi} \int_0^1 t \sin(k\pi t) dt \\ &= 0 - \frac{2}{k\pi} \left(\left[\frac{-t \cos(k\pi t)}{k\pi} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos(k\pi t)}{k\pi} dt \right) = \frac{2 \cos(k\pi)}{k^2 \pi^2} = \frac{2(-1)^k}{k^2 \pi^2} \end{aligned}$$

om $k \neq 0$. Om $k = 0$ får vi

$$c_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{1}{2} \left[\frac{t^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{3}.$$

Vi får alltså att

$$\begin{aligned} f(t) &\sim \frac{1}{3} + \sum_{k \neq 0} \frac{2(-1)^k}{k^2 \pi^2} e^{jk\pi t} \\ &= \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^k}{k^2 \pi^2} (e^{jk\pi t} + e^{-jk\pi t}) = \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{k^2 \pi^2} \cos(k\pi t). \end{aligned}$$

4. Betrakta värmeledningsekvationen i en stav av längd 1: (8p)

$$\dot{u}(x, t) = k u''_{xx}(x, t)$$

där k är en konstant och $x \in [0, 1]$. Använd Fouriers metod (dvs variabelseparation) för att bestämma den allmänna lösningen till denna PDE om vi har randvillkoren

$$u(0, t) = u'_x(1, t) = 0$$

och begynnelsevillkoret

$$u(x, 0) = f(x)$$

Lösning: Vi ansätter $u(x, t) = X(x)T(t)$ och får

$$X(x)T'(t) = kX''(x)T(t) \Leftrightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{k} \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda,$$

så att

$$(X\text{-ODE}): X''(x) = -\lambda X(x)$$

med randvillkoren $X(0) = X'(1) = 0$ och

$$(T\text{-ODE}): T'(t) = -\lambda k T(t).$$

Vi börjar med att lösa $X - ODE'_n$:

Fall 1: ($\lambda < 0$) Vi har att lösningen till $X - ODE$ blir

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

Randvillkoren ger $X(0) = C_1 + C_2 = 0$ och $X'(1) = C_1 \sqrt{-\lambda} e^{\sqrt{-\lambda}} - \sqrt{-\lambda} C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}} = 0$ vilket ger $C_1 - C_2 = 0$. Sammantaget får vi $C_1 = C_2 = 0$ och inga lösningar finns.

Fall 2: ($\lambda = 0$) Vi får att $X(x) = C_1 x + C_2$. Randvillkor ger $X(0) = C_2 = 0$ och $X'(1) = C_1 = 0$. Återigen finns inga lösningar.

Fall 3: ($\lambda > 0$) Den allmänna lösningen blir

$$X(x) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Om vi stoppar in randvillkoren får vi då

$$X(0) = C_1 = 0$$

och då $X'(x) = C_2 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}x)$ blir

$$X'(1) = C_2 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}) = 0.$$

Då $C_2 = 0$ bara ger en trivial lösning inser vi att vi måste ha $\sqrt{\lambda} = \pi/2 + n\pi$. Vi får att egenfunktionerna blir

$$X_n(x) = C \sin\left(\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)x\right).$$

Vi löser sedan $T - ODE$: n som nu är $T'(t) = -\lambda_n k T(t)$. Lösningen är

$$T_n(t) = C_n e^{-\lambda_n k t}$$

och sammantaget får vi då

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\left(\sqrt{\lambda_n} x\right) e^{-\lambda_n k t}.$$

Begynnelsevillkoret ger nu

$$f(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\left(\sqrt{\lambda_n} x\right)$$

så att vi väljer

$$\alpha_n = \frac{\langle f(x), \sin(\sqrt{\lambda_n} x) \rangle}{\|\sin(\sqrt{\lambda_n} x)\|^2}.$$

Dvs α_n är Fourierkoefficienterna.

5. Hitta övre och undre begränsningar till alla egenvärdena för följande egenvärdesproblem: (8p)

$$-D[(2x+1)u'(x)] = \lambda(x^2+2)u(x) \text{ på } x \in [0, 1],$$

med randvillkoren

$$\begin{aligned} u'(0) &= 0 \\ u'(1) &= 0 \end{aligned}$$

Lösning: Vi har två uppskattningar som ger oss två problem. Uppskattningarna ges av $1 = p_1 \leq p(x) \leq p_2 = 3$ och $2 = w_2 \leq w(x) \leq w_1 = 3$

Problem 1: Vi har

$$-D[u'(x)] = -u''(x) = 3\lambda u(x)$$

vilket ger lösningen $u(x) = C_1 \cos(\sqrt{3\lambda}x) + C_2 \sin(\sqrt{3\lambda}x)$ så att $u'(x) = -C_1\sqrt{3\lambda} \sin(\sqrt{3\lambda}x) + C_2\sqrt{3\lambda} \cos(\sqrt{3\lambda}x)$. Randvillkoren ger oss

$$u'(0) = C_2\sqrt{3\lambda} = 0,$$

så att $C_2 = 0$. Vidare har vi att

$$u'(1) = -C_1\sqrt{3\lambda} \sin(\sqrt{3\lambda}) = 0,$$

så att $\sqrt{3\lambda} = n\pi$ från vilket vi får $\lambda_n^{(1)} = \frac{n^2\pi^2}{3}$.

Problem 2: Nu får vi

$$-D[3u'(x)] = -3u''(x) = 2\lambda u(x)$$

vilket ger lösningen $u(x) = C_1 \cos(\sqrt{2\lambda/3}x) + C_2 \sin(\sqrt{2\lambda/3}x)$ så att $u'(x) = -C_1\sqrt{2\lambda/3} \sin(\sqrt{2\lambda/3}x) + C_2\sqrt{2\lambda/3} \cos(\sqrt{2\lambda/3}x)$. Randvillkoren ger oss

$$u'(0) = C_2\sqrt{2\lambda/3} = 0,$$

så att $C_2 = 0$. Vidare har vi att

$$u'(1) = -C_1\sqrt{2\lambda/3} \sin(\sqrt{2\lambda/3}) = 0,$$

så att $\sqrt{2\lambda/3} = n\pi$ från vilket vi får $\lambda_n^{(2)} = \frac{3n^2\pi^2}{2}$.

Sammantaget får vi då uppskattningarna

$$\frac{n^2\pi^2}{3} \leq \lambda_n \leq \frac{3n^2\pi^2}{2}.$$

6. Betrakta systemet (8p)

$$\begin{aligned} 4\ddot{x}_1(t) + x_1(t) + x_2(t) &= 0 \\ \ddot{x}_1(t) + \ddot{x}_2(t) + x_1(t) &= 0. \end{aligned}$$

- (a) Skriv om detta på "diagonal" form och bestäm diagonalmatrisen.
 (b) Använd svaret i (a) för att hitta $x_1(t)$ och $x_2(t)$ om

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ och } \dot{\mathbf{x}}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lösning:

- (a) Vi skriver först systemet som

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \ddot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = A\ddot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) + B\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \mathbf{0},$$

och ansätter koordinatbytet $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y}$ där kolonnerna till $\mathbf{P}$ består av egenvektorer till det generaliserade egenvärdesproblemet $(B - \lambda A)\mathbf{v} = \mathbf{0}$, vilket vi nu löser.

Till att börja med har vi

$$\det(B - \lambda A) = \begin{vmatrix} 1 - 4\lambda & 1 \\ 1 - \lambda & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1 - 4\lambda) - (1 - \lambda) = 4\lambda^2 - 1 = 0$$

vilket ger $\lambda_1 = 1/2$ och $\lambda_2 = -1/2$. Vi letar nu upp egenvektorerna $\mathbf{v}_1$:

$$(B - \lambda_1 A)\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$$

så att $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. På liknande sätt får vi

$$(B - \lambda_2 A)\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix} \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$$

så att $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Därmed blir $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ och $P^{-1} = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Vi får då

$$AP\ddot{\mathbf{y}}(\mathbf{t}) + BP\dot{\mathbf{y}}(\mathbf{t}) = \mathbf{0},$$

så att

$$\ddot{\mathbf{y}}(\mathbf{t}) + (AP)^{-1}BP\dot{\mathbf{y}}(\mathbf{t}) = \mathbf{0}.$$

Då

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

och därmed får vi (såklart)

$$\begin{aligned} (AP)^{-1}BP &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} = D. \end{aligned}$$

(b) Lösning av systemet

$$\ddot{\mathbf{y}}(\mathbf{t}) + D\mathbf{y}(\mathbf{t}) = \mathbf{0}.$$

ger

$$\begin{aligned} y_1(t) &= C_1 \sin(t/\sqrt{2}) + C_2 \cos(t/\sqrt{2}) \\ y_2(t) &= C_3 e^{t/\sqrt{2}} + C_4 e^{-t/\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Därmed får vi att (då $\mathbf{x}(\mathbf{t}) = P\mathbf{y}(\mathbf{t})$)

$$x_1(t) = y_1(t) + y_2(t) = C_1 \sin(t/\sqrt{2}) + C_2 \cos(t/\sqrt{2}) + C_3 e^{t/\sqrt{2}} + C_4 e^{-t/\sqrt{2}}$$

och att

$$x_2(t) = y_1(t) - 3y_2(t) = C_1 \sin(t/\sqrt{2}) + C_2 \cos(t/\sqrt{2}) - 3C_3 e^{t/\sqrt{2}} - 3C_4 e^{-t/\sqrt{2}}.$$

Om vi nu sätter in randvillkoren får vi att

$$\mathbf{x}(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} C_2 + C_3 + C_4 \\ C_2 - 3C_3 - 3C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ och } \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} \frac{C_1 + C_3 - C_4}{\sqrt{2}} \\ \frac{C_1 - 3C_3 + 3C_4}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ur det första ekvationsystemet får vi att $C_2 = 0$ och att $C_3 = -C_4$.
Det andra systemet ger sedan att $C_1 = 3/\sqrt{2}$, $C_3 = -1/(2\sqrt{2})$ och $C_4 = 1/(2\sqrt{2})$. Därmed får vi att

$$x_1(t) = \frac{3}{\sqrt{2}} \sin(t/\sqrt{2}) - \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{t/\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-t/\sqrt{2}}$$

och

$$x_2(t) = \frac{3}{\sqrt{2}} \sin(t/\sqrt{2}) + \frac{3}{2\sqrt{2}} e^{t/\sqrt{2}} - \frac{3}{2\sqrt{2}} e^{-t/\sqrt{2}}.$$