

Tentamentsskrivning i **Transformer och differentialekvationer MVE100**

Tid: lördagen den 20 mars, 08:30-12:30

Examinatorer: Erik Broman.

Hjälpmedel: Allt

Tentamen består av 6 frågor om sammanlagt 50 poäng. Preliminära betygsgränser är satta till:

betyg "3": 20 till 29.5 poäng

betyg "4": 30 till 39.5 poäng

betyg "5": 40 eller fler poäng.

OBS! Alla lösningar skall vara väl redovisade och motiverade. Talen är ej ordnade efter svårighetsgrad. Alla hjälpmedel är tillåtna, men räkningar måste redovisas och enbart hänvisning till beräkningsprogram ger avdrag om inget annat explicit anges.

1. Betrakta följande system av kopplade ODE:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 + 2x_1 - x_2 &= f_1(t) \\ \dot{x}_2 - x_1 + 2x_2 &= f_2(t),\end{aligned}$$

med begynnelsevillkoren $x_1(0) = 0$ och $x_2(0) = 1$.

- (a) Låt $f_1(t) = f_2(t) = 0$. Skriv systemet på formen $\dot{x} = Ax$ och lös detta system av ekvationer med tillhörande begynnelsevillkor. (5p)

- (b) Hur ändras detta resultat ifall istället $f_1(t) = f_2(t) = 1$? (3p)

Lösning

- (a) Vi kan skriva om systemet som

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -2x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - 2x_2\end{aligned}\quad \text{eller } \dot{x} = Ax \text{ där } A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

För att beräkna e^{At} använder vi sedan Cayley-Hamilton's sats och vi börjar med att beräkna egenvärdena till A . Vi har att

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -2 - \lambda & 1 \\ 1 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 + \lambda)^2 - 1 = \lambda^2 + 4\lambda + 3,$$

vilket har lösningarna $\lambda_1 = -1$ och $\lambda_2 = -3$. Vi har sedan att

$$e^{At} = \alpha_0 I + \alpha_1 A,$$

där α_0, α_1 bestäms av sambanden

$$\begin{aligned} e^{-t} &= \alpha_0 - \alpha_1 \\ e^{-3t} &= \alpha_0 - 3\alpha_1. \end{aligned}$$

Insättning av den första ekvationen i den andra ger

$$e^{-3t} = \alpha_1 + e^{-t} - 3\alpha_1 = e^{-t} - 2\alpha_1 \text{ så att } \alpha_1 = \frac{e^{-t} - e^{-3t}}{2},$$

vilket ger

$$\alpha_0 = \alpha_1 + e^{-t} = \frac{3e^{-t} - e^{-3t}}{2}.$$

Till slut blir då

$$\begin{aligned} e^{At} &= \frac{3e^{-t} - e^{-3t}}{2} I + \frac{e^{-t} - e^{-3t}}{2} A \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e^{-t} - e^{-3t} & 0 \\ 0 & 3e^{-t} - e^{-3t} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2(e^{-t} - e^{-3t}) & e^{-t} - e^{-3t} \\ e^{-t} - e^{-3t} & -2(e^{-t} - e^{-3t}) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{-t} + e^{-3t} & e^{-t} - e^{-3t} \\ e^{-t} - e^{-3t} & e^{-t} + e^{-3t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Vår lösning är nu helt enkelt

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} x = e^{tA} x_0 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{-t} + e^{-3t} & e^{-t} - e^{-3t} \\ e^{-t} - e^{-3t} & e^{-t} + e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{-t} - e^{-3t} \\ e^{-t} + e^{-3t} \end{bmatrix}.$$

(b) För ett nollskilt högerled är lösningen

$$x(t) = e^{tA} x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} f(s) ds.$$

$$e^{(t-s)A} f(s) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{-(t-s)} + e^{-3(t-s)} & e^{-(t-s)} - e^{-3(t-s)} \\ e^{-(t-s)} - e^{-3(t-s)} & e^{-(t-s)} + e^{-3(t-s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{s-t} \\ e^{s-t} \end{bmatrix}.$$

Vidare är

$$\int_0^t e^{s-t} ds = e^{-t} \int_0^t e^s ds = e^{-t} [e^s]_0^t = e^{-t}(e^t - 1) = 1 - e^{-t}$$

så att

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{tA} x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} f(s) ds \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{-t} - e^{-3t} \\ e^{-t} + e^{-3t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 - e^{-t} \\ 1 - e^{-t} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -e^{-t} - e^{-3t} + 2 \\ -e^{-t} + e^{-3t} + 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2. Betrakta följande ekvation för $t > 0$,

$$\ddot{y}(t) - 2\dot{y}(t) + y(t) = u(t),$$

med begynnelsevillkoren $y(0) = \dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = 0$.

- (a) Hitta överföringsfunktionen och impulssvaret. Är systemet stabilt?
(4p)
- (b) Bestäm en faltningsrepresentation för den allmänna lösningen och använd denna för att lösa ekvationen om

$$u(t) = \delta(t - 1)$$

(4p)

Lösning:

- (a) Med hjälp av begynnelsevillkoren ser vi att

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\ddot{y}(t) - 2\ddot{y} + \dot{y}(t) + 2y(t)) \\ = s^3 Y(s) - 2s^2 Y(s) + sY(s) = Y(s)(s^3 - 2s^2 + s). \end{aligned}$$

och vi vet att $\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$. Överföringsfunktionen blir därför

$$G(s) = \frac{1}{s^3 - 2s^2 + s} = \frac{1}{s(s-1)^2} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2}.$$

Den sista likheten kan vi se genom enkel räkning:

$$\begin{aligned} \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2} \\ = \frac{(s-1)^2 - s(s-1) + s}{s(s-1)^2} = \frac{s^2 - 2s + 1 - s^2 + s + s}{s(s-1)^2} = \frac{1}{s(s-1)^2}. \end{aligned}$$

Polerna är $s_1 = 0$, $s_2 = 1$ och $s_3 = 1$. Då dessa inte ligger i vänstra halvplanet är systemet instabilt.

Impulssvaret blir enligt tabell

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2}\right\} = 1 - e^t + te^t \text{ för } t > 0$$

(alternativt $g(t) = (1 - e^t + te^t)H(t)$).

- (b) Enligt faltningsformeln har vi att den allmänna lösningen ges av

$$\begin{aligned} x(t) &= (g * u)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)u(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (1 - e^\tau + \tau e^\tau)H(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_0^{\infty} (1 - e^\tau + \tau e^\tau)u(t-\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Vi använder sedan att $u(t-\tau) = \delta(t-\tau-1)$ och observerar att impulsen ligger vid $\tau = t-1$. Om $t < 1$ så kommer inte denna med och vi får då utsignalen

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^{\infty} (1 - e^\tau + \tau e^\tau)\delta(t-\tau-1)d\tau \\ &= \begin{cases} 0 & \text{för } 0 < t < 1 \\ 1 - e^{t-1} + (t-1)e^{t-1} = 1 - 2e^{t-1} + te^{t-1} & \text{för } t \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Alternativt kan man skriva detta som

$$x(t) = (1 - 2e^{t-1} + te^{t-1}) H(t-1).$$

3. Låt $f(t) = e^{-|t|}$ och låt sedan

$$\phi(t) = \begin{cases} f(t) & \text{om } -1 \leq t \leq 1 \\ f(t+2) = f(t) & \text{för alla andra } t. \end{cases}$$

Notera att $\phi(t)$ är den periodiska utvidgningen av $f(t)$ från $[-1, 1]$ till hela $\mathbb{R}$.

(a) Bestäm Fourierserien till $\phi(t)$. (5p)

(b) Visa att

$$\frac{1}{\sqrt{e}} = 1 - e^{-1} + \sum_{l=1}^{\infty} 2 \frac{1 - e^{-1}}{1 + 4l^2\pi^2} (-1)^l. \quad (3p)$$

Lösning: Vi har att

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\pi t}$$

då $\omega_0 = 2\pi/T = \pi$. Vidare är

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{-|t|} e^{-jk\pi t} dt = \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^0 e^t e^{-jk\pi t} dt + \int_0^1 e^{-t} e^{-jk\pi t} dt \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^0 e^{(1-jk\pi)t} dt + \int_0^1 e^{-(1+jk\pi)t} dt \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\left[\frac{e^{(1-jk\pi)t}}{1-jk\pi} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{e^{-(1+jk\pi)t}}{-(1+jk\pi)} \right]_0^1 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1 - e^{jk\pi-1}}{1-jk\pi} + \frac{e^{-1-jk\pi} - 1}{-(1+jk\pi)} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - e^{-1}(-1)^k}{1-jk\pi} + \frac{1 - e^{-1}(-1)^k}{1+jk\pi} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{(1+jk\pi)(1 - e^{-1}(-1)^k) + (1-jk\pi)(1 - e^{-1}(-1)^k)}{1+k^2\pi^2} \right) \\ &= \frac{1 - e^{-1}(-1)^k}{1+k^2\pi^2}, \end{aligned}$$

för alla $k \in \mathbb{Z}$. Vi får alltså att

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-1}(-1)^k}{1+k^2\pi^2} e^{jk\pi t} = 1 - e^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \frac{1 - e^{-1}(-1)^k}{1+k^2\pi^2} \cos(k\pi t).$$

(b) Vi ser att $t = 1/2$ är en kontinuitetspunkt och därmed har vi att

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{e}} &= e^{-1/2} = 1 - e^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \frac{1 - e^{-1}(-1)^k}{1 + k^2\pi^2} \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) \\ &= 1 - e^{-1} + \sum_{\substack{k=2 \\ \text{jämnta}}}^{\infty} 2 \frac{1 - e^{-1}(-1)^k}{1 + k^2\pi^2} \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) \\ &= 1 - e^{-1} + \sum_{l=1}^{\infty} 2 \frac{1 - e^{-1}(-1)^{2l}}{1 + (2l)^2\pi^2} \cos(l\pi) \\ &= 1 - e^{-1} + \sum_{l=1}^{\infty} 2 \frac{1 - e^{-1}}{1 + 4l^2\pi^2} (-1)^l.\end{aligned}$$

4. Betrakta egenvärdesproblemet

$$-y'''(x) = \lambda xy(x) \text{ för } 0 < x < 1$$

med randvärdena $y(0) = y'(0) = 0$ och $y'(1) = 1$.

- (a) Genomför ett iterationssteg för detta problem i syfte att hitta en approximativ egenfunktion motsvarande det minsta egenvärdet. (4p)
- (b) Använd ditt svar i (a) och Rayleigh-kvoten för att beräkna en approximation till det minsta egenvärdet λ_1 .

OBS: I deluppgift b får man använda beräkningsprogram för att beräkna värdet på integraler utan avdrag. (4p)

Lösning:

- (a) Vi börjar med att ansätta ett andragradspolynom

$$u_0(x) = c_2x^2 + c_1x + c_0 \text{ så att } u'_0(x) = 2c_2x + c_1.$$

Randvillkoren ger sedan att

$$u_0(0) = c_0 = 0, \quad u'_0(0) = c_1 = 0 \text{ och } u'_0(1) = 2c_2 = 1$$

så att $u_0(x) = \frac{x^2}{2}$. Vi beräknar sedan $u_1(x)$ från sambandet

$$-u_1'''(x) = xu_0(x) = x \frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{2},$$

och får

$$u_1(x) = -\frac{x^6}{240} + d_2x^2 + d_1x + d_0 \text{ så att } u'_1(x) = -\frac{x^5}{40} + 2d_2x + d_1.$$

Randvillkoren ger sedan $0 = u_0(0) = d_0$, $0 = u_1'(0) = d_1$ samt $u_1'(1) = -\frac{1}{40} + 2d_2 = 1$ vilket ger $d_2 = \frac{41}{80}$. Därför blir

$$u_1(x) = -\frac{x^6}{240} + \frac{41x^2}{80}.$$

Om man istället ansätter

$$v_0(x) = x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0 \text{ så att } v_0'(x) = 3x^2 + 2c_2x + c_1$$

så får man $0 = v_0(0) = c_0$ och $0 = v_0'(0) = c_1$ så att $1 = v_0'(1) = 3 + 2c_2$ så att $c_2 = -1$. Därför blir

$$v_0(x) = x^3 - x^2.$$

Till nästa steg har vi

$$v_1'''(x) = -xv_0(x) = -x^4 + x^3$$

så att

$$v_1(x) = -\frac{x^7}{210} + \frac{x^6}{120} + d_2x^2 + d_1x + d_0$$

som innan blir $d_0 = d_1 = 0$ och

$$1 = v_1'(1) = -\frac{7}{210} + \frac{6}{120} + 2d_2,$$

så att $d_2 = \frac{59}{120}$. Därför blir

$$v_1(x) = -\frac{x^7}{210} + \frac{x^6}{120} + \frac{59x^2}{120}$$

(b) Vi skall sedan beräkna Rayleigh-kvoten med u_1 och får då att

$$R(u_1) = \frac{\langle Bu_1, u_1 \rangle}{\langle Au_1, u_1 \rangle} = \frac{\langle -u_1''', u_1 \rangle}{\langle xu_1, u_1 \rangle}.$$

Sedan har vi att

$$\begin{aligned} \langle -u_1''', u_1 \rangle &= \langle xu_0, u_1 \rangle = \int_0^1 xu_0(x)u_1(x)dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^3}{2} \left(-\frac{x^6}{240} + \frac{41x^2}{80} \right) dx = -\int_0^1 \frac{x^9}{480} dx + \int_0^1 \frac{41x^5}{160} dx \\ &= -\frac{1}{4800} + \frac{41}{960} = \frac{17}{400}, \end{aligned}$$

och vidare är

$$\langle xu_1, u_1 \rangle = \int_0^1 x(u_1(x))^2 dx = \int_0^1 x \left(-\frac{x^6}{240} + \frac{41x^2}{80} \right)^2 dx = \frac{43697}{1008000}.$$

Vi får därför att

$$R(u_1) = \frac{\langle -u_1''', u_1 \rangle}{\langle xu_1, u_1 \rangle} = \frac{17}{400} \frac{1008000}{43697} = \frac{42840}{43697} \approx 0.9804$$

Om man istället använder v_0, v_1 så får man

$$R(v_1) \approx -0.2887.$$

Hur kan detta funka? Problemet är att vi aldrig bryr oss om att kolla ifall problemet är självadjungerat och totaldefinit! Vi borde därför inte använda metoden alls. Detta spelar dock inte någon roll för själva räkningarna vi gör.

5. Lös ekvationen

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

med randvillkoren $u(0, t) = 0$, $u_x(\pi, t) = 0$ och med begynnelsevillkoren $u(x, 0) \equiv 1$ och $u_t(x, 0) \equiv 0$. (Observera att området är $[0, \pi]$ och att bivillkoren innehåller derivator!) (8p)

OBS: I denna uppgift får man använda beräkningsprogram för att beräkna alla integraler som dyker upp när koefficienter skall bestämmas.

Lösning: Vi ansätter $u(x, t) = X(x)T(t)$ och får att

$$X(x)T''(t) = c^2 X''(x)T(t) \text{ så att } \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = -\lambda,$$

vilket ger oss X-ODE $X''(x) = -\lambda X(x)$ med randvillkoren $X(0) = 0$ och $X'(\pi) = 0$. T-ODE'n blir $T''(t) = -\lambda c^2 T(t)$.

Vi kan antingen dela upp i tre fall eller också använder vi teorin om Sturm-Liouville problem. Vi använder den senare metoden av dessa och observerar därför följande:

Vi har ett Sturm-Liouville problem med $p(x) \equiv 1$, $q(x) \equiv 0$ och $w(x) \equiv 1$. Vidare är (med beteckningar från föreläsning alt häftet) $a_1 = 0$ och $b_2 = 0$.

Teori ger oss då att alla egenvärdena är positiva. För $\lambda > 0$ har vi sedan att $X''(x) = -\lambda X(x)$ löses av

$$X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}x)$$

så att

$$X'(x) = c_1 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}x) - c_2 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Det första randvillkoret ger att $0 = X(0) = c_2$ och det andra ger att $0 = X'(\pi) = c_1 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}\pi)$ vilket ger att

$$\sqrt{\lambda_n} \pi = \frac{2n-1}{2} \pi \text{ så att } \lambda_n = \left(\frac{2n-1}{2} \right)^2$$

för $n = 1, 2, \dots$. Vi betraktar sedan ODE'n $T_n''(t) = -\lambda_n c^2 T(t)$ som har lösningen

$$T_n(t) = a_n \sin(c\sqrt{\lambda_n}t) + b_n \cos(c\sqrt{\lambda_n}t).$$

Vi sätter samman detta och får

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = \sin(\sqrt{\lambda_n}x) \left(a_n \sin(c\sqrt{\lambda_n}t) + b_n \cos(c\sqrt{\lambda_n}t) \right)$$

där $n = 1, 2, \dots$. Vår allmänna lösning blir

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\sqrt{\lambda_n}x) \left(a_n \sin(c\sqrt{\lambda_n}t) + b_n \cos(c\sqrt{\lambda_n}t) \right).$$

Vårt första begynnelsevillkor ger oss

$$1 \equiv u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\sqrt{\lambda_n}x)$$

så att

$$b_n = \frac{\langle 1, \sin(\sqrt{\lambda_n}x) \rangle}{\langle \sin(\sqrt{\lambda_n}x), \sin(\sqrt{\lambda_n}x) \rangle} = \frac{\int_0^\pi \sin\left(\frac{2n-1}{2}x\right) dx}{\int_0^\pi \left(\sin\left(\frac{2n-1}{2}x\right)\right)^2 dx} = \frac{\frac{2}{2n-1}}{\pi/2} = \frac{4}{\pi(2n-1)}.$$

Vårt andra begynnelsevillkor ger oss

$$0 = u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n)_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\sqrt{\lambda_n}x) a_n c \sqrt{\lambda_n},$$

så att $a_n = 0$. Vi får då till slut

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)} \sin(\sqrt{\lambda_n}x) \cos(c\sqrt{\lambda_n}t).$$

6. Bestäm Fouriertransformen av följande funktioner med hjälp av bifogad tabell:

(a) $f(t) = \cos(t) (H(t) - H(t - \pi)).$ (4p)

(b) $g(t) = \cos(t) * (H(t) - H(t - \pi)).$ (4p)

(c) Använd svaret i (b) för att beräkna $\cos(t) * (H(t) - H(t - \pi))$ (2p)

Lösning:

- (a) Vi skriver om $f(t)$ så att vi kan använda tabell. Vi har att

$$f(t) = \cos(t)H(t) - \cos(t)H(t - \pi) = \cos(t)H(t) + \cos(t - \pi)H(t - \pi),$$

där vi använder den trigonometriska identiteten $\cos(t - \pi) = -\cos(t)$.
Enligt tabell är

$$\mathcal{F}\{\cos(t)H(t)\} = \pi(\delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1)) + \frac{j\omega}{1 - \omega^2}.$$

Vi har dessutom att $\mathcal{F}\{f(t-\tau)\} = e^{-j\omega\tau}F(j\omega)$ så att

$$\mathcal{F}\{\cos(t-\pi)H(t-\pi)\} = e^{-j\omega\pi} \left(\pi(\delta(\omega-1) + \delta(\omega+1)) + \frac{j\omega}{1-\omega^2} \right).$$

Sammantaget blir då

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(t)\} &= \pi(\delta(\omega-1) + \delta(\omega+1)) + \frac{j\omega}{1-\omega^2} + e^{-j\omega\pi} \left(\pi(\delta(\omega-1) + \delta(\omega+1)) + \frac{j\omega}{1-\omega^2} \right) \\ &= \pi(\delta(\omega-1) + \delta(\omega+1)) + \frac{j\omega}{1-\omega^2} + \left(\pi(e^{-j\pi}\delta(\omega-1) + e^{j\pi}\delta(\omega+1)) + e^{-j\omega\pi} \frac{j\omega}{1-\omega^2} \right) \\ &= \pi(\delta(\omega-1) + \delta(\omega+1)) + \frac{j\omega}{1-\omega^2} + \left(\pi(-\delta(\omega-1) - \delta(\omega+1)) + e^{-j\omega\pi} \frac{j\omega}{1-\omega^2} \right) \\ &= \frac{j\omega}{1-\omega^2} (1 + e^{-j\omega\pi}). \end{aligned}$$

(b) Enligt tabell så är

$$\mathcal{F}\{\cos(t)\} = \pi(\delta(\omega-1) + \delta(\omega+1)).$$

Vidare är

$$\mathcal{F}\{H(t)\} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \text{ så att } \mathcal{F}\{H(t-\pi)\} = e^{-j\omega\pi}(\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}) = \pi\delta(\omega) + \frac{e^{-j\omega\pi}}{j\omega}.$$

och därmed blir

$$\mathcal{F}\{H(t) - H(t-\pi)\} = \frac{1 - e^{-j\omega\pi}}{j\omega}.$$

Vi har därför att

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\cos(t) * (H(t) - H(t-\pi))\} &= \mathcal{F}\{\cos(t)\} \mathcal{F}\{H(t) - H(t-\pi)\} \\ &= \pi(\delta(\omega-1) + \delta(\omega+1)) \frac{1 - e^{-j\omega\pi}}{j\omega} = \pi\delta(\omega-1) \frac{1 - e^{-j\pi}}{j} + \pi\delta(\omega+1) \frac{1 - e^{j\pi}}{-j} \\ &= \frac{2\pi}{j} (\delta(\omega-1) - \delta(\omega+1)). \end{aligned}$$

(c) Vi ser då att

$$\cos(t) * (H(t) - H(t-\pi)) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{2\pi}{j} (\delta(\omega-1) - \delta(\omega+1)) \right\} = 2 \sin(t),$$

enligt tabell.