Föreläsning #1

① Flervariabel - Analys ②

① Innebär att vi studerar funktioner
$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad \ldots (*)$$
för godtyckliga $n, m \in \mathbb{N}$

- $n = m = 1$: envariabelanalys
- $(*)$ f sägs vara en "funktion av n variabler"
- $m = 1$: skalärvärd funktion
- $m > 1$: vektorvärd funktion
- $n = m$: "n-dimensionellt vektorfält"

• Främst fokuserar vi på fallet $m = 1$, dvs skalärvärda funktioner av n variabler, för godtyckligt n. Dessutom räcker det ofta att studera fallet $n = 2$: generalisering till $n > 2$ innebär ofta bara mer komplicerad notation. Det är steget från $n = 1$ till $n = 2$ där de viktiga nya idéerna uppstå

• Vektorvärda funktioner (allmänna n, m) studeras i Kapitel 3 (Lv 2)

• Vektorfält : 2- och 3-dimensioner studeras i Kapitel 9, 10 (Lv 5 ff)

Notation $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$$

$$= (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

Då $m=1$ skriver vi bara f, ej f_1.

(2) Innebär att vi främst är intresserade av att generalisera de två grundläggande begreppen från envariabelanalys till högre dimensioner:

Derivering (Lv 1, 2, 8; Kapitel 2, 3, 4)
Integration (Lv 3, 4; Kapitel 6, 7, 8)

Resten av kursen består av
- en kortare diskussion om kurvor och ytor (Lv 5; Kap. 3, 8)
- vektoranalys i planet (Kap. 9) och rummet (Kap. 10), vilket i synnerhet har fysikaliska tillämpningar

Derivering

För en funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ var det grundläggande begreppet från envariabelanalys: DERIVATAN till f.

Jag presenterar 3 olika formuleringar av begreppet så att vi såsmaningom ser hur generaliseringen till $n \geq 1$ går till

Formulering 1

Rigorös definition:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sägs vara derivebar / differentierbar i $x = a$ om

(i) f är definierad i en omgivning av $x = a$

(ii) $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existerar.

Gränsvärdet kallas för derivatan till f i $x = a$ och betecknas $f'(a)$, $df/dx\,(a)$, $df/dx\,\big|_{x=a}$, ...

Formulering 2

Antag att gränsvärdet ovan existerar och sätt ~~x~~:

$$\rho(h) := \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \quad (*)$$

(ii) säger att $\lim_{h \to 0} \rho(h) = 0$.

(*) kan skrivas om till

$$f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + h \cdot \rho(h)$$

Omformuleringen blir:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sägs vara deriverbar/differentierbar i $x = a$ om f är definierad i en omgivning av $x = a$ och det finns en konstant $A \in \mathbb{R}$ och en funktion $\rho(h)$ s.a.

$$\boxed{f(a+h) = f(a) + A \cdot h + h \cdot \rho(h),} \quad (1)$$

där $\rho(h) \to 0$ då $h \to 0$.

Notera att $A = f'(a)$ i så fall.

Formulering 3

Betrakta grafen till f, dvs kurvan $y = f(x)$ i planet.

Om vi struntade i den s.k. "feltermen" $h \cdot \rho(h)$ i (1) så skulle

$$f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h$$

representera en linje i planet som tangerar grafen till f vid $x = a$.

Därför kallas (1) för linjäriseringen av f i $x=a$

Att $\rho(h) \to 0$ medför då att det finns en unik tangentlinje till grafen i $x = a$.

Alltså har vi en "geometrisk" formulering av deriverbarhet:

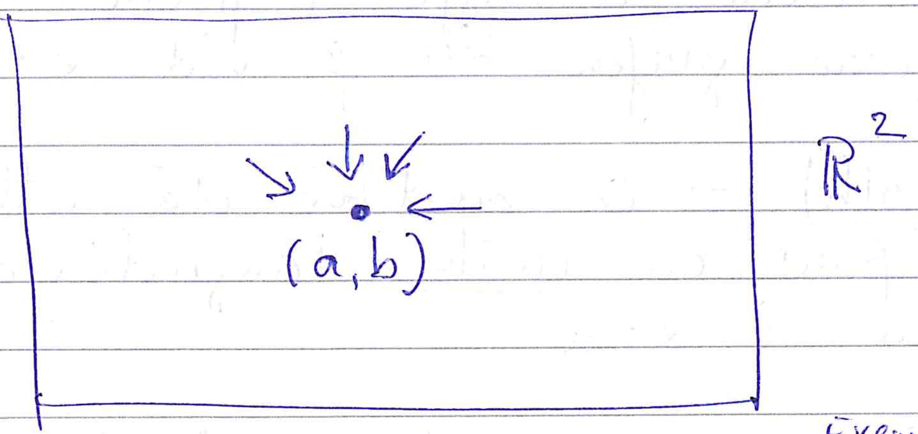
f är deriverbar i $x = a$ om det finns en unik linje i planet som är tangent till grafen $y = f(x)$ i $x = a$.

- Nu försöker vi generalisera till funktioner $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ för $n > 1$. Vi fokuserar på $n = 2$ för att underlätta notation.

Formulering 1

Talar om vad som händer med f då man närmar sig x=a längs x-axeln. Gränsvärdet är f:s "förändringshastighet" i x=a.

Redan för n=2 stöter vi på problem med generaliseringen: det finns nu ∞ många riktningar längs vilka man kan närma sig baspunkten



Exempel kommer

Kan förändringshastigheten bero på riktningen? Svar: Ja. Så det finns i allmänhet inget unikt tal som kan utropas till f:s "derivata"

Förändringshastigheten i en viss riktning (om motsvarande gränsvärde existerar) kallas för en riktningsderivata

Särskilt viktigt är f:s s.k. partiella

derivator, då vi närmar oss baspunkten i riktning // med någon av koordinataxlarna.

Def: (Def 1, § 2.1 i boken)

Låt $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ och $(a,b) \in D(f)$. De partiella derivatorna till f i (a,b) ges av

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{k \to 0} \frac{f(a,b+k) - f(a,b)}{k}$$

OBS! Man förutsätter att f är definierad i en omgivning av (a,b), dvs att $\exists\ \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ s.a. $f(x,y)$ är definierad då $|x-a| < \varepsilon_1$ och $|y-b| < \varepsilon_2$, samt att gränsvärdena existerar.

Viktig Poäng:

Har man en formel för f så kan man beräkna partiella derivatorna som i envariabelanalys, ty alla variabler utom en hålls konstanta.

Ex: Låt $f(x,y) = x^2y + e^{xy} + \sin(x^2 - y^3)$

Det är klart att $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är definierad i hela $\mathbb{R}^2$.

Vi beräknar f:s partiella derivator.

För $\partial f/\partial x$: betrakta y som konstant

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + ye^{xy} + 2x\cos(x^2 - y^3)$$

För $\partial f/\partial y$: betrakta x som konstant

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + xe^{xy} - 3y^2\cos(x^2 - y^3).$$

Notera:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 2 + e + 2 = 4 + e \quad (\cos 0 = 1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 1 + e - 3 = e - 2$$

Så $\partial f/\partial x \neq \partial f/\partial y$ i punkten $(1,1)$

"Förändringshastighet hos f beror på riktningen"

Följande två exempel visar ännu mer tydligt problemet med att generalisera Formulering 1.

Ex. 2 Kom ihåg från envariabelanalysen att, för $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gäller:

$$f \text{ deriverbar i } x = a \Rightarrow f \text{ kontinuerlig i } x = a$$

Bevis: Låt $h \to 0$ i (1). I synnerhet har vi att $f(a+h) \to f(a)$, dvs f kontinuerlig.

Betrakta nu $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ som ges av

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{då } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{då } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \overset{\text{def}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

PSS, $\partial f / \partial y \, (0,0) = 0$.

Så båda de partiella derivatorna existerar och är lika med noll.

MEN: f är inte ens kontinuerlig i $x=0$. T.ex.

$$f(t,t) = t^2/2t^2 = 1/2$$

så $\lim_{t\to 0} f(t,t) = 1/2 \neq f(0,0) = 0$.

(Man skulle kunna säga att f är inte kontinuerlig i riktningen $y=x$)

Ex. 3 Kan bli ännu värre.
Betrakta $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ givet av

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^3+y^7}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Kan visa:
- Riktningsderivatan i $(0,0)$ i varje riktning är noll
- Men f är fortfarande inte ens kontinuerlig i $(0,0)$. Om man

närmar sig origo längs $y=\sqrt{x}$ så har vi

$$f(t,\sqrt{t}) = \frac{t^3}{t^3+t^{7/2}} \to 1 \text{ då } t\to 0$$

Men $f(0,0) = 0 \neq 1$.

Formuleringar 2, 3

Dessa är lättare att generalisera.

Mest intuitivt är nog den geometriska tolkningen

Låt $f(x,y)$ vara en funktion av 2 variabler.

Dess graf $z = f(x,y)$ blir då en yta i rummet

Intuitivt (Formulering 3)

f är differentierbar i en punkt (a,b) om det finns ett unikt plan som är tangent till f:s graf i punkten.

Slutade föreläsning 1 här

Mer formellt (Formulering 2)

Vi vill skriva en "linjärisering" för f

Def (Def 2, §2.2)

Låt $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vara en funktion av 2 variabler och $(a,b) \in D(f)$.
f sägs vara differentierbar i (a,b) om

(i) f är definierad i en omgivning av (a,b), dvs $\exists\ \varepsilon > 0$ s.a. $(x,y) \in D(f)$ då $|x-a| < \varepsilon$ och $|y-b| < \varepsilon$

(ii) det finns konstanter A, B och en funktion $\rho: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ s.a.

$$\boxed{f(a+h, b+k) = f(a,b) + A\cdot h + B\cdot k + \sqrt{h^2+k^2}\,\rho(h,k)} \quad (2)$$

där $\rho(h,k) \to 0$ då $(h,k) \to (0,0)$

(2) är "linjäriseringen" av f i (a,b).

Fråga: Vad är kopplingen mellan (2) och den intuitiva definitionen av differentierbarhet i termer av ett unikt tangentplan till grafen?

Vi återkommer till detta nästa gång.

Några anmärkningar för att avsluta idag:

(A) Sats 1 $\quad f$ differentierbar i $(a,b) \Rightarrow$
f kontinuerlig i (a,b)

Bevis $\quad$ Låt $h,k \to 0$ i (2).
I synnerhet har vi då att
$f(a+h, b+k) \to f(a,b)$, dvs f
kontinuerlig.

(B) Sats 2 $\quad$ Om f uppfyller (2) då är

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \quad ; \quad B = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

Bevis $\quad$ Sätt $k=0$ i (2) $\Rightarrow$

$$A = \frac{f(a+h, b) - f(a,b)}{h} \pm \rho(h,0)$$

Låt nu $h \to 0$. Ty $\rho(h,0) \to \rho(0,0) = 0$
så får vi att

$$A = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a,b)}{h} \overset{\text{per def}}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$$

Samma sorts argument för att
visa $B = \partial f/\partial y\,(a,b)$.

(c) Generalisering av Defs 1,2 till $n \geq 2$ variabler, godtyckligt n, innebär endast mer komplicerad notation.

<u>Def 1</u> Låt $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f = f(x_1, \ldots, x_n)$, vara en funktion av n variabler och $\mathbb{a} \in D(f)$. För $i \in \{1, \ldots, n\}$ gäller

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbb{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbb{a} + h\mathbb{e}_i) - f(\mathbb{a})}{h},$$

under förutsättning att f är definierad i en omgivning av $\mathbb{a}$, dvs att $f(\mathbb{x})$ är definierad då $\| \mathbb{x} - \mathbb{a} \| < \varepsilon$ för nåt $\varepsilon > 0$, och att gränsvärdet existerar.

(Kom ihåg: $\mathbb{e}_i = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$)

$\Uparrow$ position i

<u>Def 2</u> $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sägs vara <u>differentierbar</u> i $\mathbb{x} = \mathbb{a}$ om

(i) f är definierad i en omgivning av $\mathbb{a}$, dvs $\exists$ $\varepsilon > 0$ s.a. $f(\mathbb{a} + \mathbb{h})$ är definierad då $\| \mathbb{h} \| < \varepsilon$

(ii) det finns konstanter $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{R}$ och en funktion $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ s.a.

$$\boxed{f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \sum_{i=1}^{n} A_i h_i + \|\mathbf{h}\| \cdot \rho(\mathbf{h})} \quad (3)$$

där $\rho(\mathbf{h}) \to 0$ då $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$.

Mer utförligt: $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$, $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)$

$$f(a_1+h_1, \dots, a_n+h_n) = f(a_1, \dots, a_n) + \sum_{i=1}^{n} A_i h_i + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} h_i^2}\ \rho(h_1, \dots, h_n)$$

där $\rho(h_1, \dots, h_n) \to 0$ då $(h_1, \dots, h_n) \to (0, \dots, 0)$.

Kan då visa (Sats 2) att

$$A_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}).$$

Mer kompakt

Sätt $\nabla f(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \right)$

Vektorn $\nabla f(\mathbf{a})$ kallas för <u>gradienten</u> till f i $\mathbf{x} = \mathbf{a}$.

$\boxed{\text{Gradienten är till flervariabelanalys vad derivatan är till envariabelanalys}}$

OBS!

(3) blir då:

skalärprodukt av vektorer

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} + \|\mathbf{h}\| \rho(\mathbf{h})$$

Detta är formel (26), s. 76 i boken.