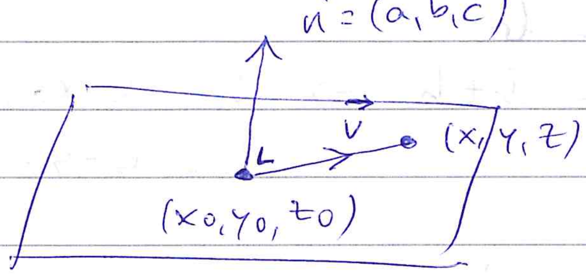
Föreläsning #2 (forts.)

Vi vill förklara kopplingen mellan linjäriseringsformeln (2) och existens av ett tangentplan till grafen $z = f(x,y)$

Kom ihåg ekvationen för ett plan i $\mathbb{R}^3$:



(x_0,y_0,z_0) baspunkt i planet
(x,y,z) godtycklig punkt i planet
$\vec{n} = (a,b,c)$ normal till planet

$$\vec{v} = (x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0)$$

$\vec{n}$ en normal $\Rightarrow$ $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$
$\Rightarrow$ $a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$

Kan skrivas : $ax + by + cz = d$
$(d = ax_0 + by_0 + cz_0)$

Tag nu (2) och strunta i feltermen $\sqrt{h^2+k^2}\,\rho(h,k)$. Då har vi en approximation

$$f(a+h, b+k) \approx f(a,b) + A \cdot h + B \cdot k$$

Kom ihåg att $A = f'_x(a,b)$, $B = f_y(a,b)$

Så:

$$f(a+h, b+k) \approx f(a,b) + f_x(a,b) \cdot h + f_y(a,b) \cdot k \quad \ldots (*)$$

Sätt $x_0 = a$, $y_0 = b$

$x = a+h$, $y = b+k \Rightarrow h = x - x_0$,

$k = y - y_0$

Grafen: $z = f(x,y)$, $z_0 := f(x_0, y_0)$

Då blir $(*)$:

$$z \approx z_0 + f_x(a,b)(x - x_0) + f_y(a,b)(y - y_0)$$

Om vi hade likhet så skulle detta vara ekvationen för ett plan:

$$\boxed{f_x(a,b)(x - x_0) + f_y(a,b)(y - y_0) - (z - z_0) = 0} \quad (4)$$

Planet går igenom $(x_0, y_0, z_0) = (a, b, f(a,b))$ och har normalvektor $(f_x(a,b), f_y(a,b), -1)$

Detta är då tangentplanet till den differentierbara funktionen f i punkten $(a, b, f(a,b))$.

Ex. 2.11 Bestäm tangentplanet i punkten $(1,1,5)$ till paraboloiden

$$z = x^2 + 4y^2$$

Lösning $z = f(x,y)$ där $f(x,y) = x^2 + 4y^2$

$f_x = 2x \overset{(1,1,5)}{=} 2$ $\qquad x_0 = 1$

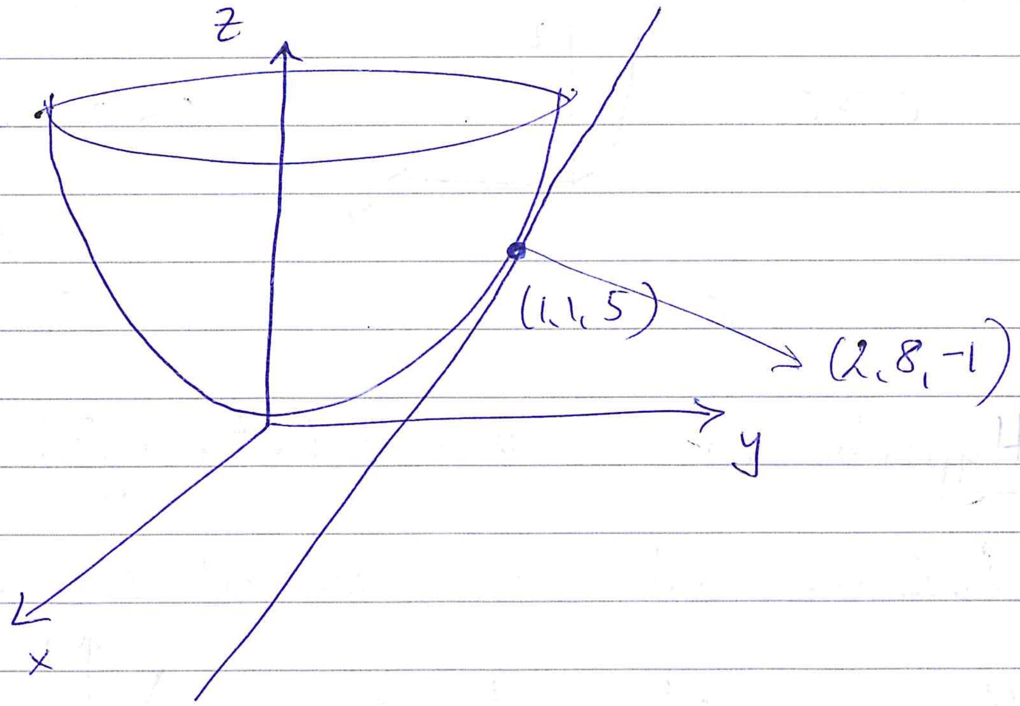
$\qquad\qquad\qquad\qquad y_0 = 1$

$f_y = 8y \overset{(1,1,5)}{=} 8$ $\qquad z_0 = 5$

$$f_x(x - x_0) + f_y(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

$\Rightarrow \quad 2(x-1) + 8(y-1) - (z-5) = 0$

$\Rightarrow \quad 2x + 8y - z = 5$



Aside Andragradsytor i rummet
(Se filen i Canvas)

Sfär: $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = r^2$

(x_0, y_0, z_0) mittpunkt

r = radien

Ellipsoid: $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} + \dfrac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1$

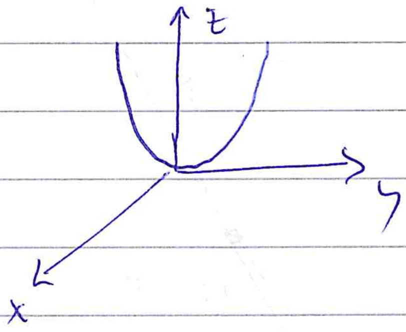
(Axelparallell) cylinder: $x^2 + y^2 = r^2$

$x^2 + z^2 = r^2$

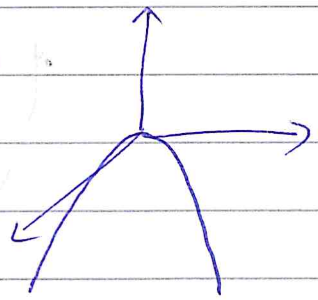
$y^2 + z^2 = r^2$

Paraboloid: $z = c(x^2 + ty^2)$ $t > 0$

$c > 0$



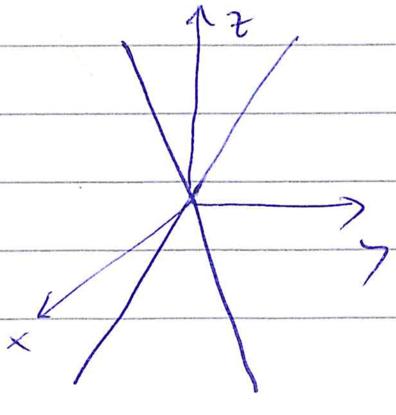
$c < 0$



Hyperboloid: $z = c(x^2 + ty^2)$ $t < 0$

Svårare att rita, ser ut som en sadel

Kon: $z^2 = x^2 + y^2$



Teori

Givet en funktion $f(x,y)$ av 2 variabler och en punkt $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, om man vill visa rigoröst att f är differentierbar i (a,b) så ska man visa att (2) gäller.

Hur man gör är alltså:

- Beräkna $f_x(a,b)$
- Beräkna $f_y(a,b)$
- Sätt

$$\rho(h,k) := \frac{f(a+h,b+k) - f(a,b) - h\cdot f_x(a,b) - k\cdot f_y(a,b)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

och bevisa att $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \rho(h,k) = 0$.

Exempel görs på övningen imorgon.

Sådana beräkningar kan bli tröttsamma. Om vi vill bara försäkra oss att f är differentierbar (vilket behövs för att bygga vidare med teorin) så är följande sats nyttig:

Notation Låt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ och låt D vara en domän i $\mathbb{R}^n$, dvs en öppen + sammanhängande mängd

Vi skriver $f \in C^1(D)$ om ("f tillhör klassen $C^1(D)$") alla f:s partiella derivator $f_{x_1}, \dots, f_{x_n}$ existerar i hela D och är kontinuerliga funktioner av n variabler.

Sats 2.2.3

$f \in C^1(D) \Rightarrow f$ är differentierbar i hela D

Innan vi presenterar beviset vill jag göra ett par anmärkningar

Anm. 1

Som vi tidigare har konstaterat, om man har en "formel" för f så kan man beräkna formler för dess partiella derivator som i envariabelanalys (alla variabler utom en hålls konstanta)

Det innebär att det är ofta ganska lätt

att se att en funktion har kontinuerliga partiella derivator och således är differentierbar, utan att behöva räkna på (2) direkt.

Anm. 2

Satsen säger INTE emot de konstiga exemplen från igår.

Tag t.ex. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Utanför (0,0) har vi en formel för f och kan beräkna formler för f_x, f_y:

$$f_x = \frac{(x^2+y^2)\cdot y - (xy)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y = \ldots (\text{symmetri}) \ldots = \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

Således är det klart att f är C^1 och därmed differentierbar.

I (0,0) däremot såg vi att f är inte ens kontinuerlig och därmed kan ej heller vara differentierbar heller.

Samtidigt såg vi att f:s båda partiella derivator existerar och $=0$ i $(0,0)$.

För att detta inte ska säga emot Sats 2.2.3 måste de partiella derivatorna ej vara <u>kontinuerliga</u> i $(0,0)$.

Kolla själva som en övning att funktionen

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

är inte kontinuerlig i $(0,0)$.

<u>Anm. 3</u>

$\Leftarrow$ gäller ej i Sats 2.2.3.

Det finns redan funktioner av <u>en</u> variabel som är deriverbara men vars derivator inte är kontinuerliga funktioner. Ett standard exempel (som dök upp då jag googlade "function whose derivative is discontinuous") är

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Jag lämnar beviset som en övning (i envariabelanalys).

Bevis av Sats 2.2.3

Jag formulerar beviset för $n=2$ bara för att underlätta notationen. Den som är intresserad kan försöka formulera beviset för godtyckligt $n \in \mathbb{N}$

Så låt $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vara en funktion av 2 variabler, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ en domän och $(a,b) \in D$.

Vi antar att $f \in C^1(D)$ och måste bevisa att f är differentierbar i (a,b). Eftersom $f \in C^1(D)$ så är ekvation (2) åtminstone väldefinierad ($f_x(a,b)$, $f_y(a,b)$ existerar) så det som återstår att bevisa är att $\rho(h,k) \to 0$ då $(h,k) \to (0,0)$ där $\rho(h,k)$ definieras enligt

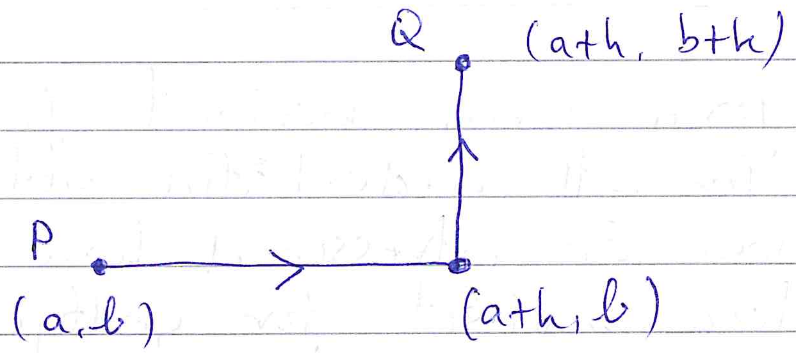
$$\rho(h,k) = \frac{f(a+h,b+k) - f(a,b) - h\cdot f_x(a,b) - k\cdot f_y(a,b)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

Först ett trick: skriv

$$f(a+h,b+k) - f(a,b) =$$

$$\underbrace{\left[f(a+h,b+k) - f(a+h,b) \right]}_{1} + \underbrace{\left[f(a+h,b) - f(a,b) \right]}_{2}$$

<u>Idé</u>:



Tag dig från P till Q längs den markerade vägen

Betrakta först 2 :

Längs vägen från (a,b) till (a+h,b) håller vi y konstant, bara x varierar. Det blir som om f var en funktion av endast x med derivata f_x.

Eftersom f_x antas vara en <u>kontinuerlig</u> funktion kan vi anropa envariabelns <u>medelvärdesats</u>

Således finns det $\theta_1 \in (0,1)$ s.a.

$$(*) \quad f(a+h, b) - f(a,b) = h \cdot f_x(a+\theta_1 h, b)$$

På samma sätt visas att det finns $\theta_2 \in (0,1)$ s.a.

$$(**) \quad f(a+h, b+k) - f(a+h, b) = k \cdot f_y(a+h, b+\theta_2 k)$$

Insättning av $(*)$, $(**)$ ger

$$\rho(h,k) = \frac{h[f_x(a+\theta_1 h, b) - f_x(a,b)] + k[f_y(a+h, b+\theta_2 k) - f_y(a,b)]}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

För alla h, k gäller trivialt att

$$\left|\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| \leq 1, \quad \left|\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| \leq 1$$

$$\Rightarrow |\rho(h,k)| \leq |f_x(a+\theta_1 h, b) - f_x(a,b)| + |f_y(a+h, b+\theta_2 k) - f_y(a,b)| \quad (***)$$

Låt nu $(h,k) \to (0,0)$.

Klart att

$$(a+\theta_1 h, b) \to (a, b)$$
$$(a+h, b+\theta_2 k) \to (a, b)$$

(OBS! θ_1, θ_2 beror också på h, k men det spelar ingen roll. Båda ligger i intervallet $(0,1)$ oavsett)

och eftersom f_x, f_y är Kontinuerliga funktioner så gäller

$$f_x(a+\theta_1 h, b) \to f_x(a, b)$$

$$f_y(a+h, b+\theta_2 k) \to f_y(a, b)$$

Detta innebär att HL av (~~***~~) $\to 0$ då $(h, k) \to (0,0)$
$\Rightarrow \rho(h,k) \to 0$, v.s.v. $\boxed{///}$