Föreläsning #3 (forts.)

- Ämnet för denna föreläsning är Kedjeregeln

- Kedjeregeln gäller sammansättningar av differentierbara funktioner

- Ni har redan sett Kedjeregeln för funktioner $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (påminnelse nedan) och nu ska vi utvidga den till funktioner av flera variabler.

- Den mest allmänna formeln av regeln som vi ska formulera ges i ekvationer (16), (17), (18) på s. 138 - 139.
Vi kommer dit i 4 steg, varav de 3 första vi tar idag (Kap 2.3).
Sista steget tar vi nästa vecka (Kap 3.3)
Köttet finns i Steg 2 (Sats 2.3.4)

- Vi kommer att tillämpa Kedjeregeln till variabelbyte i partiella differentialekvationer (PDE)

Påminnelse: Kedjeregeln i envariabelanalys

<u>Sats</u> Låt $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara deriverbara funktioner av en variabel.
Låt $a \in \mathbb{R}$ vara sådant att
- a är en inre punkt i $D(g)$
- $g(a)$ är en inre punkt i $D(f)$.

Då är den sammansatta funktionen
$f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $[(f \circ g)(t) \overset{\text{def}}{=} f(g(t))]$
deriverbar i $t = a$ och

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$$

<u>Sammansättningar i flera variabler</u>

Låt $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $f : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^m$

- Sammansättningen $f \circ g$ är definierad endast om $p = q$
- I så fall gäller $f \circ g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Man kan skriva:

$$f = f(x_1, \ldots, x_p) = (f_1(x_1, \ldots, x_p), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_p))$$

$$g = g(t_1, \ldots, t_n) = (g_1(t_1, \ldots, t_n), \ldots, g_p(t_1, \ldots, t_n))$$

$$f \circ g)(t_1, \ldots, t_n) = (f_1(g_1(t_1, \ldots, t_n), \ldots, g_p(t_1, \ldots, t_n)), \ldots$$
$$\ldots, f_m(g_1(t_1, \ldots, t_n), \ldots, g_p(t_1, \ldots, t_n)))$$

I Steg 1, 2, 3 håller vi oss till $m=1$, dvs $f \circ g$ är en skalärvärd funktion av n variabler.

<u>Steg 1</u> $p=1$, n godtyckligt

Ekv. (1b), s. 61:

Låt $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vara en differentierbar funktion av n variabler och $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara en deriverbar funktion av en variabel.

Låt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ vara en punkt s.a.
- $\mathbf{a}$ är en inre punkt i $D(g)$
- $g(\mathbf{a})$ är en inre punkt i $D(f)$

Då är sammansättningen $f \circ g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differentierbar i $\mathbf{t} = \mathbf{a}$ och

(3.1)
$$\frac{\partial}{\partial t_j} f(g(t_1, \ldots, t_n))\Big|_{\mathbf{t}=\mathbf{a}} \qquad \forall\, i = 1, \ldots, n$$
$$= f'(g(t_1, \ldots, t_n))\Big|_{\mathbf{t}=\mathbf{a}} \cdot \frac{\partial g}{\partial t_j}(\mathbf{a})$$

<u>Mer kompakt</u>: $\frac{\partial}{\partial t_j} f(g(\mathbf{t})) = f'(g(\mathbf{t})) \cdot \frac{\partial g}{\partial t_j}$

Bevis: Det är exakt samma bevis som i envariabelanalys.
När man tar partiella derivator m.a.p. t_j, för fixt j, så håller man alla variabler t_i, $i \neq j$, konstanta, så det är som om f och g var funktioner av endast en variabel, t_j. Då gäller den vanliga kedjeregeln, fast nu ska "derivata" tolkas som "partiell derivata m.a.p. t_j".

Ex 2.18 Kolla övningsboken för formuleringen.

Lösning Vi har $f = g \circ r$,

där $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ och $r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$r(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

Enligt (3.1):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(g \circ r(x,y)) = g'(r) \cdot \frac{\partial r}{\partial x}$$
$$= g'(r) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

och
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(g \circ r(x,y)) = g'(r) \cdot \partial r/\partial y$$
$$= g'(r) \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Insättning i PDE:n :

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} g'(r) + \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} g'(r) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\Rightarrow g'(r) = \frac{1}{x^2+y^2}$$

dvs $g'(r) = 1/r^2$

$$\Rightarrow g(r) = \int 1/r^2 \, dr + C$$

$$g(r) = -1/r + C$$

M.a.o. $f(x,y) = \dfrac{-1}{\sqrt{x^2+y^2}} + C$

är den allmänna lösningen av den sökte formen, där $C \in \mathbb{R}$ är en valfri konstant.

Om nu : $f(x,y) = 1$ då $r = 1$ (s.k. randvillkor)

$$\Rightarrow 1 = -1/1 + C \Rightarrow C = 2$$

$\Rightarrow f(x,y) = \dfrac{-1}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2$ är den unika lösningen som uppfyller randvillkoret.

(Note: Att $f(x,y)$, en a priori funktion av 2 oberoende variabler, endast beror på radien $r = \sqrt{x^2+y^2}$ skulle en fysiker uttrycka som att "f är cykliskt symmetrisk", dvs f är konstant på cirklar centrerad i origo).

Steg 2 $n=1$, p godtyckligt.

Se filen på hemsidan för formuleringen och beviset av kedjeregeln i detta fall. Det är Sats 2.3.4 i boken. I boken tar de $p=2$ för att underlätta notationen, men för detta bevis blir notationen inte mycket värre för godtycklig p, så jag har gett beviset för godtycklig p.

Note: Formuleringen av kedjeregeln i detta fall kan presenteras mer kompakt i vektorform som

$$\frac{d}{dt} f(\vec{g}(t)) = \nabla f(\vec{g}(t)) \cdot \frac{d\vec{g}}{dt}, \quad (3.2)$$

MVE035, VT-18: BEVIS AV SATS 2.3.4 FÖR GODTYCKLIGT $n \in \mathbb{N}$

Sats. *Låt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vara en differentierbar funktion av n variabler, $f = f(x_1, \dots, x_n)$, och låt $g_1, \dots, g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara differentierbara funktioner av den reella variabeln t. Då gäller att sammansättningen $f(g_1(t), \dots, g_n(t))$ är en differentierbar funktion av t och*

$$\frac{d}{dt} f(g_1(t), \dots, g_n(t)) = \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_p}(g_1(t), \dots, g_n(t)) \frac{dg_p}{dt}. \tag{0.1}$$

Bevis: Sätt

$$F(t) = f(g_1(t), \dots, g_n(t)) \tag{0.2}$$

och låt $a \in \mathbb{R}$. Vi måste visa att F är differentierbar i $x = a$, dvs att gränsvärdet

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(a+h) - F(a)}{h} \tag{0.3}$$

existerar, och att den är lika med

$$F'(a) = \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_p}(g_1(a), \dots, g_n(a)) \frac{dg_p}{dt}(a). \tag{0.4}$$

Per definition så är

$$F(a+h) = f(g_1(a+h), \dots, g_n(a+h)). \tag{0.5}$$

Eftersom varje g_p är differentierbar så kan de alla linjäriseras kring $x = a$, alltså

$$g_p(a+h) = g_p(a) + h \cdot \frac{dg_p}{dt}(a) + h \cdot \rho_p(h), \quad \text{där } \forall p,\ \rho_p(h) \to 0 \text{ då } h \to 0. \tag{0.6}$$

Sätt

$$\boldsymbol{a} := (g_1(a), \dots, g_n(a)), \tag{0.7}$$

$$\boldsymbol{h} := h \cdot \left(\frac{dg_1}{dt}(a), \dots, \frac{dg_n}{dt}(a) \right) + h \cdot (\rho_1(h), \dots, \rho_n(h)). \tag{0.8}$$

Då gäller att

$$F(a+h) - F(a) = f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}). \tag{0.9}$$

Men f är differentierbar så

$$f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{h} \cdot \nabla f(\boldsymbol{a}) + ||\boldsymbol{h}|| \cdot \rho(\boldsymbol{h}), \quad \text{där } \rho(\boldsymbol{h}) \to 0 \text{ då } \boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}. \tag{0.10}$$

Notera nu att
(0.11)

$$\boldsymbol{h} \cdot \nabla f(\boldsymbol{a}) = h \cdot \left[\sum_{p=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_p}(g_1(a), \dots, g_n(a)) \frac{dg_p}{dt}(a) \right] + h \cdot \left[\sum_{p=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_p}(g_1(a), \dots, g_n(a)) \rho_p(h) \right]$$

och

$$||\boldsymbol{h}|| = |h| \cdot \sqrt{\sum_{p=1}^{n} \left(\frac{dg_p}{dt}(a) + \rho_p(h) \right)^2}. \tag{0.12}$$

Således är

$$\frac{F(a+h)-F(a)}{h} = \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_p}(g_1(a),\ldots,g_n(a))\,\frac{dg_p}{dt}(a) +$$

$$(0.13)\qquad + \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_p}(g_1(a),\ldots,g_n(a))\cdot \rho_p(h) + \frac{|h|}{h}\,\rho(\boldsymbol{h})\sqrt{\sum_{p=1}^{n}\left(\frac{dg_p}{dt}(a)+\rho_p(h)\right)^2}.$$

Första summan i HL av (0.13) är oberoende av h och överensstämmer med HL av (0.4). Så det räcker att bevisa att de övriga termerna i HL av (0.13) går mot noll då $h \to 0$.

När det gäller den andra summan så har vi redan konstaterat i (0.6) att $\rho_p(h) \to 0$ då $h \to 0$, för varje p. Således går summan mot noll, ty koefficienterna är bara de partiella derivatorna till f i en fixt punkt, alltså är konstanter.

När det gäller den tredje termen så kan vi konstatera att

(i) $|h|/h = \pm 1$,
(ii) det är klart från (0.8) att $\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}$ då $h \to 0$ och således går $\rho(\boldsymbol{h})$ mot noll då $h \to 0$, enligt (0.10),
(iii) eftersom $\rho_p(h) \to 0\ \forall p$ så går summan mot det konstanta värdet $\sqrt{\sum_{p=1}^{n}\left(\frac{dg_p}{dt}(a)\right)^2}$.

Således går den tredje termen i HL av (0.13) mot noll också då $h \to 0$ och beviset är klart.

där $\vec{g} = (g_1, \dots, g_p)$ är en vektorvärd funktion och

$$\frac{d\vec{g}}{dt} \overset{\text{def}}{=} \left(\frac{dg_1}{dt}, \dots, \frac{dg_p}{dt} \right)$$

Steg 3 $\quad n, p$ båda godtyckliga

Ekv. (24), s. 69:

Låt $g_1, \dots, g_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vara p st. differentierbara funktioner av n variabler, och $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ vara en differentierbar funktion av p variabler.

Låt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ vara en punkt s.a.

- $\mathbf{a}$ är en inre punkt i $D(g_j)$ för varje $j = 1, \dots, p$
- $(g_1(\mathbf{a}), \dots, g_p(\mathbf{a}))$ är en inre punkt i $D(f)$

Då är den sammansatta funktionen $f \circ \vec{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ av n variabler differentierbar i $\mathbf{a}$ och

där $\vec{g} = (g_1, \dots, g_p)$

$\longrightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial t_j}\left(f(g_1(t_1,\dots,t_n),\dots,g_p(t_1,\dots,t_n))\right)\Big|_{\mathbb{t}=\mathbb{a}}$$

$$= \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_k}(g_1(t_1,\dots,t_n),\dots,g_p(t_1,\dots,t_n))\Big|_{\mathbb{t}=\mathbb{a}}$$

$$\cdot \frac{\partial g_k}{\partial t_j}(\mathbb{a}) \qquad (3.3)$$

Mer kompakt

$$\frac{\partial}{\partial t_j} f(\vec{g}(\mathbb{t})) = \nabla f(\vec{g}(\mathbb{t})) \cdot \frac{\partial \vec{g}}{\partial t_j} \qquad (3.3b)$$

Bevis: Följer från Steg 2 på samma sätt som Steg 1 följer från envariabels-kedjeregeln.

Tillämpning på PDE

Det vanligaste tillämpningen är ett variabelbyte i planet

$$(x,y) \longrightarrow (u,v)$$

M.e.o. vi byter ut ett givet Cartesiskt

Koordinatsystem mot ett annat (Kanske icke-Cartesiskt) system som är lämpligare att jobba med för den aktuella tillämpningen.

Viktigaste exemplet är <u>polära Koordinater</u>

$$(x,y) \longleftrightarrow (r,\theta)$$

$\rightarrow$ $r = \sqrt{x^2+y^2} = r(x,y)$

$\theta = \tan^{-1}(y/x) = \theta(x,y)$

$\leftarrow$ Åt andra hållet : $\rightarrow$ <u>OBS!</u> Detta illustrerar att "giltiga" Koordinatbyten ska alltid vara <u>inverterbara</u>.

$$x = x(r,\theta) = r\cos\theta$$
$$y = y(r,\theta) = r\sin\theta$$

Säg nu att man har en okänd differentierbar funktion $f(x,y)$ av 2 variabler, och en PDE för f. PDE är oftast svåra att lösa. Ett möjligt trick skulle vara att byta till välvalda nya variabler (u,v) om PDE:n blir enklare att lösa (dvs integrera) när den skrivs i termer av dessa.

För att skriva om PDE:n måste vi skriva de partiella derivatorna $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ i termer av $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}$.

Kedjeregeln används för detta ändamål:

1. Skriv de nya variablerna i termer av de gamla

$$u = u(x,y) \quad , \quad v = v(x,y)$$

2. Då vi arbetar med de nya variablerna kan funktionen $f(x,y)$ betraktas som en sammansatt funktion

$$f(x,y) = f(u,v) = f(u(x,y), v(x,y))$$

Enligt (3.3):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\partial f / \partial y = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

Samma principer gäller för >2 variabler

Ex 2.25   Se övningsboken för formuleringen.

Lösning $u = u(x,y) = x^2 + y^2$
$v = v(x,y) = e^{-x^2/2}$

(Notera att v är oberoende av y)

Enligt Kedjeregeln:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 2x \frac{\partial f}{\partial u} - x e^{-x^2/2} \frac{\partial f}{\partial v}$$

Och: $$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \frac{\partial f}{\partial u} + 0$$

Insättning i PDE:n :

$$y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y} = xyf$$

$$\Rightarrow \left(\cancel{2xyf_u} - xye^{-x^2/2} f_v\right) - \cancel{2xyf_u} = xyf$$

$$\Rightarrow -xye^{-x^2/2} f_v = xyf$$

Utanför koordinataxlarna är $xy \neq 0$ så vi kan då kancellera och får

$$-e^{-x^2/2} f_v = f$$

$$\Leftrightarrow \quad -v f_v = f$$

Nu tänker vi oss att vi arbetar med u, v, och då har vi en PDE som vi faktiskt kan lösa:

$$-v \frac{\partial f}{\partial v} = f(u,v)$$

$$\Rightarrow \int \frac{\partial f}{f} = -\int \frac{\partial v}{v} + C(u)$$

integrations- "konstanten" är nu snarare ngt vars partiella derivata m.a.p. v försvinner, dvs det är en valfri funktion av endast u

$$\Rightarrow \ln f = \ln\left(\frac{1}{v}\right) + C(u)$$

$$\Rightarrow f(u,v) = \underbrace{e^{C(u)}}_{\text{lika väl en "valfri" funktion av } u} / v$$

$$\Rightarrow f(u,v) = \frac{C_1(u)}{v}$$

, där $C_1(u)$ är en valfri deriverbar funktion av u

Detta är PDEn:s allmänna lösning, i termer av de nya variablerna u, v.

I termer av de gamla variablerna:

$$f(x,y) = C_1(x^2+y^2) \cdot e^{x^2/2},$$

där $C_1(t)$ är en valfri deriverbar funktion av en variabel t

Randvillkor: $f(0,y) = y^2$

$$\Rightarrow C_1(y^2) \cdot e^0 = y^2$$

$$\Rightarrow C_1(y^2) = y^2 \text{ gäller } \forall y$$

$$\Rightarrow C_1(t) = t \quad \forall t$$

$$\Rightarrow C_1(x^2+y^2) = x^2+y^2$$

$$\Rightarrow f(x,y) = (x^2+y^2) \cdot e^{x^2/2}$$

är den unika lösningen som uppfyller randvillkoret.