Föreläsning #4

Ska täcka in två olika ämnen

- Gradienter & riktningsderivator
- Derivator av högre ordning (Clairauts Sats, 2.5.9)

Jag har redan nämnt både "gradient" och "riktningsderivata". Nu ger vi formella definitioner.

Def 4, s.74

Låt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vara en differentierbar funktion. Gradienten $\nabla f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ är funktionen av n variabler som ges av

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)(\mathbf{x})$$

Kolla Sats 2.4.5 i boken, som är ett exempel på något jag nämnde tidigare, att gradienten "spelar samma roll i flervariabelanalys som derivatan gör i envariabelanalys". Vi kommer att se många fler illustrationer av detta.

Riktningsderivator

Notera först att det finns en 1-1 Korrespondens mellan riktningar i $\mathbb{R}^n$ och n-dimensionella enhetsvektorer

$$\{\text{riktningar i } \mathbb{R}^n\} \longleftrightarrow \underbrace{\{\hat{u} \in \mathbb{R}^n \mid \|\hat{u}\| = 1\}}_{:=\, S^{n-1}}$$

(n-1)-dim. enhetssfären

Def 5, s. 77

Låt $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vara en funktion av n variabler, a en inre punkt i $D(f)$ och $\hat{u} \in S^{n-1}$ en riktning.

Riktningsderivatan av f i punkten a och i riktningen $\hat{u}$ ges av

$$\frac{\partial f}{\partial u}(a) = f_u(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h\hat{u}) - f(a)}{h}$$

Sats 2.4.6

Om $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ är differentierbar i punkten a, då existerar riktningsderivatan $f_u(a)$ för varje riktning $\hat{u} \in S^{n-1}$. Dessutom gäller

$$f_u(a) = \nabla f(a) \cdot \hat{u} \qquad (4.1)$$

OBS! Satsen innebär att man behöver inte hänvisa hela tiden till definitionen av f_u som ett gränsvärde vid beräkningar. Det räcker att beräkna fs partiella derivator och sedan skalärprodukten i (4.1).

Bevis: I boken hänvisas till Kedjeregeln men detta är overkill. Här följer ett bevis utan att använda Kedjeregeln.

Givet $\mathbf{a}$ och $\hat{u}$. Eftersom f är differentierbar i $\mathbf{a}$ gäller linjäriseringen

$$f(\mathbf{a}+h\hat{u}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a})\cdot(h\hat{u}) + \|h\hat{u}\|\cdot\rho(h\hat{u}),$$

där $\rho(x) \to 0$ då $x \to 0$.

Eftersom $\|\hat{u}\| = 1$ kan detta skrivas om till

$$\frac{f(\mathbf{a}+h\hat{u}) - f(\mathbf{a})}{h} = \nabla f(\mathbf{a})\cdot\hat{u} \pm \rho(h\hat{u}$$

Ty $\rho(h\hat{u}) \to 0$ då $h \to 0$ $\Rightarrow$

$$\nabla f(\mathbf{a})\cdot\hat{u} = \lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{a}+h\hat{u}) - f(\mathbf{a})}{h},$$ V.S.V.

Ex 2.32 Bestäm riktningsderivatan till $f(x,y,z) = \dfrac{(x^2+y^2)z}{2-z^2}$ i punkten $(-1,2,1)$ och i riktningen mot punkten $(0,4,-1)$

Lösning Riktningen (ej normaliserad) är

$$u = (0,4,-1) - (-1,2,1) = (1,2,-2)$$

$$\Rightarrow \hat{u} = \frac{(1,2,-2)}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}} = \tfrac{1}{3}(1,2,-2)$$

$$\nabla f = (f_x, f_y, f_z)$$

$$= \left(\frac{2xz}{2-z^2}, \frac{2yz}{2-z^2}, (x^2+y^2)\frac{2+z^2}{(2-z^2)^2} \right)$$

$$\overset{(-1,2,1)}{=} \dots = (-2, 4, 15)$$

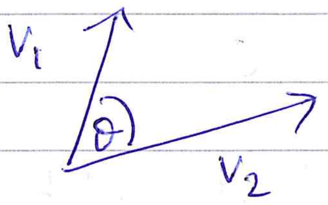
Så
$$f_u = \nabla f \cdot \hat{u} = \tfrac{1}{3}(-2,4,15)\cdot(1,2,-2)$$
$$= \tfrac{1}{3}\left[(-2)(1) + 4(2) + 15(-2)\right]$$
$$= \tfrac{1}{3}(-24) = -8.$$

Sats 2.4.7

Låt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vara differentierbar i $\mathbf{x} = \mathbf{a}$. Gradienten $\nabla f(\mathbf{a})$ pekar i den riktning i vilken funktionen f

växer snabbast i punkten $\mathbf{a}$ och mätetalet på den maximala tillväxthastigheten är $\|\nabla f(\mathbf{a})\|$.

<u>Bevis</u> Kom ihåg:



$$v_1 \bullet v_2 = \|v_1\| \|v_2\| \cos\theta$$

För varje riktning $\hat{u} \in S^{n-1}$ har vi således

$$f_u(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \hat{u}$$
$$= \|\nabla f(\mathbf{a})\| \cdot \|\hat{u}\| \cdot \cos(\theta)$$

Men $\|\hat{u}\| = 1$ alltid och $\|\nabla f(\mathbf{a})\|$ är en konstant (dvs oberoende av u) så $f_u(\mathbf{a})$ maximeras då $\cos\theta$ maximeras, dvs då $\theta = 0$.

$\cos\theta = 1$ } M.a.o. max av $f_u(\mathbf{a})$ är lika med $\|\nabla f(\mathbf{a})\|$ och antas då $\nabla f(\mathbf{a})$ är parallell med $\hat{u}$, m.a.o. i riktning // med fs gradient $\boxtimes$

Tumregel: "Follow the gradient"

Nivåytor

Def: Låt $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ vara en funktion av $n+1$ variabler och $C \in \mathbb{R}$ en konstant. Ekvationen

$$f(x_1, \dots, x_{n+1}) = C$$

definierar i allmänhet (inte alltid, t.ex. $x^2+y^2=-1$) en n-dimensionell (hyper)yta i $\mathbb{R}^{n+1}$.

Intuitivt kan man tänka sig att en variabel kan elimineras från ekvationen så att man har kvar n st oberoende variabler. Notera dock att utom i de enklaste fallen brukar algebran vara för krånglig för att explicit kunna skriva en variabel i termer av de övriga.

Hur som helst, en sådan (hyper)yta ($n>2$) kallas för en nivå(hyper)yta till f.

$n=1$: man säger nivåkurva

$n=2$: — " — nivåyta

$n>2$: — " — nivåhyperyta

Antag nu att f är differentierbar.
Låt $\mathbb{a} \in \mathbb{R}^{n+1}$ vara en punkt.

Sätt $c := f(\mathbb{a})$.

Låt $\hat{u} \in S^n$ vara en riktning.
Vi har

$$f_u(\mathbb{a}) = \nabla f(\mathbb{a}) \cdot \hat{u}$$

Då gäller:

$$f_u(\mathbb{a}) = 0 \iff \nabla f(\mathbb{a}) \cdot \hat{u} = 0$$
$$\iff \nabla f(\mathbb{a}) \perp \hat{u}$$

Dvs: Riktningsderivatan är 0 i just de riktningar som är ortogonala mot $\nabla f(\mathbb{a})$.

<u>Geometriskt</u>: $\nabla f(\mathbb{a})$ är en normal till tangent(hyper)planet $f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = c$.

Detta är innehållet av Sats 2.4.8.

$\longrightarrow$

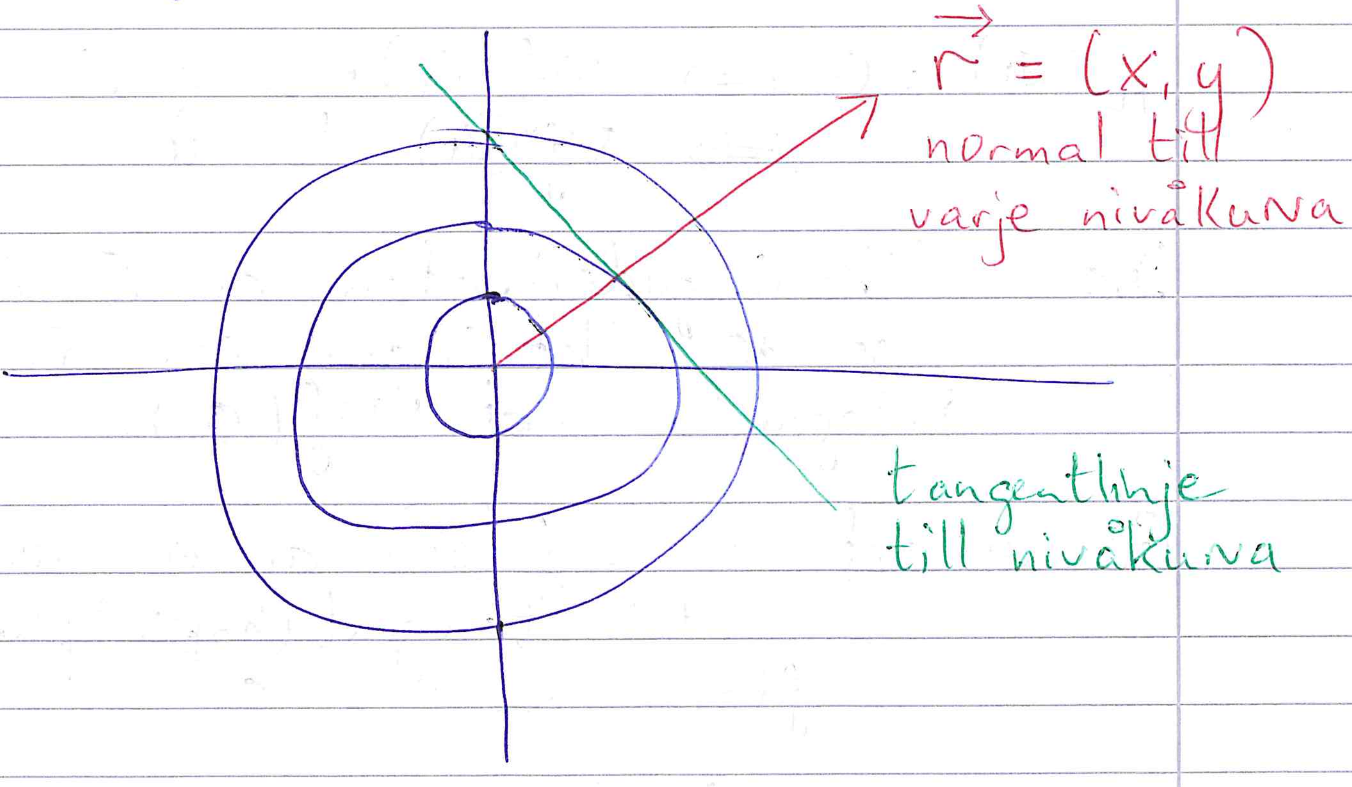
Enkelt exempel att ha i huvudet:

$n=1$: $\quad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

$$x^2+y^2 = c \begin{cases} \text{tom mängd}, & c<0 \\ \text{en punkt } (0,0), & c=0 \\ \text{en cirkel kring origo}, & c>0 \end{cases}$$

Så vi får en faktisk nivåkurva för varje $c>0$



$$\nabla f = (f_x, f_y) = (2x, 2y) = 2\vec{r}$$

Så ∇f är alltid normal till nivåkurvorna, v.s.v.

Exempel : Satser 2.4.7 + 2.4.8

Tänk dig en temperaturkarta

- Nivåytorna är s.k. ~~isobterrner~~ dvs ytorna där temperaturen är konstant
- Vinden följer gradienterna till isotermerna, dvs följer riktningen där temperaturen avtar snabbast

Sats 2.4.7 kan utvidgas till att konstatera att f avtar snabbast i motsatt riktning till gradienten.

Ex 2.43(a) Bestäm tangentplanet i (3,2,1) till nivåytan

$$N = \{(x,y,z) \mid xz^5 + xyz - 9 = 0\}$$

Lösning Tag $f(x,y,z) = xz^5 + xyz$

$c = 9$

notera att (3,2,1) faktiskt tillhör N

N är således nivåytan $f(x,y,z) = c$

$$Df = (f_x, f_y, f_z) = (z^5 + yz,\ xz,\ 5xz^4 + xy) \underset{(3,2,1)}{=} (3, 3, 21) \parallel (1, 1, 7)$$

$\longrightarrow$

Tangentplanet till N i $(3,2,1)$ har således:

En punkt däri: $(3,2,1) = (x_0, y_0, z_0)$
Normalvektor: $(1,1,7) = (a,b,c)$

Så dess ekvation är

$$1(x-3) + 1(y-2) + 7(z-1) = 0$$
$$\iff \quad x + y + 7z = 12 \quad : \text{Svar}$$

Dåligt ordval. Säg i stället "Grads"

Högre Ordnings Derivator

Notation: $f = f(x_1, \ldots, x_n)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \quad \text{alt.} \quad f_{x_j x_i}$$

Båda betyder: "Derivera partiellt, först m.a.p. x_i sedan m.a.p. x_j"

Då $i=j$ skriver man bara $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$

Klart hur notationen utvidgas till ~~ordning~~ grad > 2.

Terminologi

Låt $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$D \subseteq \mathbb{R}^n$ en domän
$k \geq 0$ ett heltal

f sägs tillhöra klassen $C^k(D)$ om alla dess partiella derivator av ordning $\leq k$ existerar och är kontinuerliga funktioner i hela D

- Vi har redan stött på klassen $C^1(D)$ i Sats 2.2.3
- $C^0(D)$ betyder ~~mängden~~ klassen av alla kontinuerliga funktioner i D.
- För $k \geq 2$, det viktigaste resultatet är Clairauts Sats. Den säger att, om $f \in C^k(D)$ då är resultatet av en partiell derivering av ~~ordning~~ grad $\leq k$ oberoende av ordningen av variablerna vi deriverar m.a.p.
  Med andra ord, resultatet beror endast på ~~vilka vari~~ antalet ggr vi deriverar m.a.p. varje variabel, inte på ordningen i vilken vi utför de partiella deriveringarna.

Så t.ex.

$n=k=2$: $f_{xy} = f_{yx}$

$n=3, k=2$: $f_{xy} = f_{yx}$, $f_{xz} = f_{zx}$, $f_{yz} = f_{zy}$

$n=2, k=3$: $f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx}$

$f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}$

o.s.v.

Sats 2.5.9 är Clairauts Sats för $n=k=2$: Man ska visa alltså att om $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är en C^2-funktion av 2 variabler, då gäller att $f_{xy} = f_{yx}$.

Filen på hemsidan ger en enklare presentation av detta bevis (bokens bevis är onödigt krångligt)

.... Vi går igenom beviset.

OBS! Clairauts Sats för allmänna n, k kan sedan härledes via ~~ett~~ induktion, först på antalet variabler (n) och sedan på graden (k). Lämnas som en (frivillig) övning att formulera argumentet rigoröst.