MVE035/600 Exercise session 1.2.

Wednesday, 20 January 2021 15:04

2.1: e) Beräkna alla första ordningens derivator av

$$f(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2}$$

2.2: b) Beräkna alla första ordningens derivator av

$$f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Lösning: Låt $g(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\|$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}}\cdot \cancel{2}x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \frac{x}{\|(x,y)\|}.$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \{g(x,y) = g(y,x)\}$$

$$= \frac{y}{\|(x,y)\|}.$$

(**Allmänt:** $\frac{\partial}{\partial x_k}\|x\|_{\mathbb{R}^n} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$

$$= \frac{1}{\cancel{2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}}\cdot \cancel{2}x_k = \frac{x_k}{\|x\|_{\mathbb{R}^n}}.$$)

Vi hade $f(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2} = \log(g(x,y))$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{d(\log(g))}{dg}\cdot\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$$

$$= \frac{1}{g(x,y)}\cdot\frac{x}{g(x,y)} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}^{\,2}} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{x}{\|(x,y)\|^2}.$$

(<u>Allmänt!</u> $\frac{\partial}{\partial x_k} \log\|x\| = \frac{x_k}{\|x\|^2}$)

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}.$$

<u>2.8.</u> c) Visa att $f(x,y) = e^{x+2y}$ är <u>differentierbar</u> i $(2,2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\exists A, B \in \mathbb{R} \text{ s.a.}$$

$$f(2+h, 2+k) - f(2,2) = Ah + Bk + \|(h,k)\|\,\sigma(\|(h,k)\|)$$

$$= e^{(2+h)+2(2+k)} - e^{2+2\cdot 2}$$

$$= e^{6+h+2k} - e^6 = e^6\left(e^{h+2k} - 1\right)$$

$$= e^6\left(h + 2k + \mathcal{O}((h+2k)^2)\right)$$

(Taylor) -

$$= e^6 h + 2e^6 k + \underbrace{\mathcal{O}((h+2k)^2)}$$

$$\sim \mathcal{O}(\|(h,k)\|^2) = \|(h,k)\|\,\sigma(\|(h,k)\|)$$

$$= e^6 h + 2e^6 k + \|(h,k)\|\,\sigma(\|(h,k)\|).$$

$\Longrightarrow$ f är differentierbar i $(2,2)$ med

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(2,2) = e^6 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(2,2) = 2e^6. \end{cases}$$

<u>2.9:</u> Effekt $P = \frac{U^2}{R}$ och $U = 220\,V$, $R = 9\,\Omega$. Uppskatta skillnaden i effekt när U ökas med $5\,V$ och R med $0.3\,\Omega$.

<u>Lösning:</u> $\Delta U = 5$, $\Delta R = 0.3$ "är små",

$\partial P \quad \partial P$

$$\rightsquigarrow \Delta P \approx \frac{\partial P}{\partial U}\Delta U + \frac{\partial P}{\partial R}\Delta R .$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial U} = \dfrac{2U}{R} = \dfrac{440}{9}, \\[2ex] \dfrac{\partial P}{\partial R} = -\dfrac{U^2}{R^2} = -\left(\dfrac{220}{9}\right)^2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \Delta P \approx \frac{440}{9}\cdot 5 - \left(\frac{220}{9}\right)^2 0.3 \approx 65\,W .$$

Extra: $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) := \dfrac{x^3 y^4}{x^4 + y^{16}}$, $(x,y) \neq (0,0)$,

$$f(0,0) := 0 .$$

Visa

i) att f är väldefinierad.

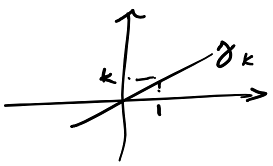
ii) att alla riktningsderivator av f i $(0,0)$ är 0.

iii) att f inte är kontinuerlig i $(0,0)$.

Lösning: i) f väldefinierad omm $x^4 + y^{16} \neq 0$ $\forall (x,y) \neq 0$.

Stämmer!

ii) Derivering med avseende på en kurva $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ genom $(0,0)$ är ekvivalent med riktningsderivatan av funktionen ifråga i riktningen $\gamma'(t_0)$ $(\gamma(t_0) = (0,0))$.



Låt $\gamma_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ för nåt $k \in \mathbb{R}$.
$\qquad t \longmapsto (t, kt)$

1) $$\frac{\partial f}{\partial \gamma_k} := \frac{d(f \circ \gamma_k)}{dt} = \frac{d}{dt} f(t, kt) = \frac{d}{dt}\left(\frac{t^3 k^4 t^4}{t^4 + k^{16} t^{16}}\right)$$

$$= \frac{7k^4 t^6 (t^4 + k^{16} t^{16}) - k^4 t^7 (4t^3 + 16 k^{16} t^{15})}{(t^4 + k^{16} t^{16})^2}$$

$$= \frac{t^{10}}{t^8} \; \frac{7k^4 + 7k^{20} t^{12} - 4k^4 - 16 k^{20} t^{12}}{(1 + k^{16} t^{12})^2}$$

$$\underset{t\approx 0}{\approx} t^2 \cdot \frac{3k^4}{t^2} = 3k^4t^2 \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$

2) $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ då $f(0,y) = \frac{0\cdot y^4}{y^{16}} = 0 \quad \forall y\neq 0.$

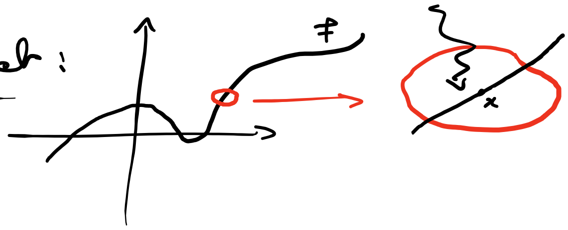
iii) Om vi bara testar kontinuitet m.a.p. linjer γ_k och y-axeln är

$$(f\circ\gamma_k)(t) = \frac{k^4t^7}{t^4+k^{16}t^{16}} = \frac{k^4t^3}{1+k^{16}t^{12}} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$

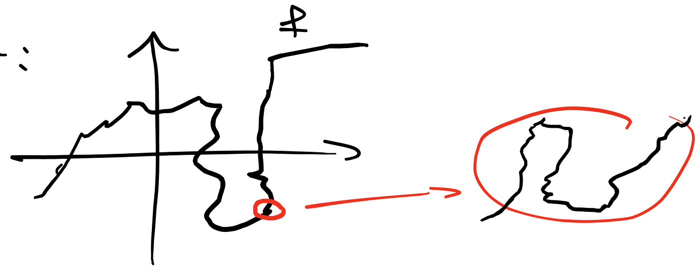
så f är kontinuerlig ??

$f \approx f(x) + \frac{\partial f}{\partial x}\cdot(\cdot - x)$

Deriverbarhet:



Kontinuitet:



Tag kurvan $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$
$t \mapsto (t, |t|^{1/4})$, $t \geq 0$

$$\Rightarrow (f\circ\gamma)(t) = \frac{t^3(t^{1/4})^4}{t^4+(t^{1/4})^{16}} = \frac{t^4}{t^4+t^4} = \frac{1}{2}$$

$$\cancel{\xrightarrow[t\to 0]{} 0 = f(0,0)}$$

$f\circ\gamma$ ej kont. $\Rightarrow$ f ej kont. eller ~~γ ej kont.~~