

Föreläsningar # 5,6

Vi börjar med beviset av Clairauts Sats (Sats 2.5.9) som vi hade kvar från förra veckan.

Ex 2.58 Se övningsboken för formuleringen.

OBS! Tidigare har vi använt kedjeregeln för att utföra variabelbyten i PDE av grad 1. När graden är 2 måste man typ tillämpa kedjeregeln typ 2 ggr. Det blir vanligtvis mer komplicerad algebra vid 2:a deriveringarna. I synnerhet uppstår ofta produkter efter 1:a deriveringen, så glöm ej att också tillämpa produktregeln i sådana fall vid 2:a deriveringen.

Lösning: Enligt kedjeregeln:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} &= e^{-y} \frac{\partial f}{\partial u} + 0 \quad \dots (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \\ \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} &= -xe^{-y} \frac{\partial f}{\partial u} + 1 \cdot \frac{\partial f}{\partial v} \quad \dots (2) \end{aligned}$$

OBS! (2) behövs ej i denna uppgift ty

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ finns ej i PDE:n och när

det gäller $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$

är det ju, enligt Clairauts Sats,
samma sak som $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$.

Så vi måste nu tillämpa kedjeregeln
en gång till och derivera (1) m.a.p.
x, resp. y.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

$$\stackrel{(1)}{=} \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{-y} \frac{\partial f}{\partial u} \right)$$

$$\stackrel{y \text{ "konstant"}}{=} e^{-y} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)$$

$$\stackrel{\text{kedje}}{=} e^{-y} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right) \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right] \quad \text{0}$$

$$= e^{-y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot e^{-y} \right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{-2y} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \quad \dots \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(e^{-y} \frac{\partial f}{\partial u} \right)$$

produkt

$$= e^{-y} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right) - e^{-y} \frac{\partial f}{\partial u}$$

kedje

$$= e^{-y} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right) \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right]$$

$$- e^{-y} \frac{\partial f}{\partial u}$$

$$= e^{-y} \left(-x e^{-y} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \cdot 1 \right) - e^{-y} \frac{\partial f}{\partial u}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -x e^{-2y} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + e^{-y} \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}$$

$$- e^{-y} \frac{\partial f}{\partial u} \quad \dots (4)$$

Insättning av (1), (3), (4) i
PDEn ger

~~$$x \left(e^{-2y} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \right) + \left[-x e^{-2y} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + e^{-y} \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \right]$$~~

~~$$- e^{-y} \frac{\partial f}{\partial u} \Big] + e^{-y} \frac{\partial f}{\partial u} = x e^{-2y}$$~~

$$\Rightarrow e^{-y} \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} = x e^{-2y}$$

$$\overset{e^{-y} \neq 0}{\Rightarrow} \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} = x e^{-y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} = u \quad \dots (5)$$

Så nu vi har skrivit om PDEn helt i termer av u & v .

Integrationen är dessutom lätt

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right) = u$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial u} = \int u \, dv + C_1(u)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial u} = uv + C_1(u)$$

$$\Rightarrow f = \int (uv + C_1(u)) \, du + C_2(v)$$

$$\Rightarrow f(u, v) = \frac{1}{2} u^2 v + C_3(u) + C_2(v)$$

där $C_2(v)$, $C_3(u)$ är valfria

C^2 -funktioner av en variabel
($C_3(u) := \int C_1(u) du$ är lika valfri som C_1)

I termer av x & y har vi

$$f(x, y) = \frac{1}{2} x^2 y e^{-2y} + C_3(xe^{-2y}) + C_2(y),$$

där C_2, C_3 är valfria C^2 -funktioner av en variabel.

Detta är PDEns allmänna lösning.

Anmärkning:

Det hade gått lika bra att integrera (5) "åt andra hållet", dvs enligt Clairaut, $\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right) = u$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v} &= \int u \, du + C_2^*(v) \\ &= \frac{1}{2} u^2 + C_2^*(v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f &= \int \frac{1}{2} u^2 \, dv + \int C_2^*(v) \, dv + C_3(u) \\ &= \frac{1}{2} u^2 v + C_2(v) + C_3(u), \end{aligned}$$

vsv.

Exempel 27, s. 89 i boken

Detta är ett viktigt exempel från fysik. PDEn

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2},$$

där $f(x, t)$ är en C^2 -funktion av 2 variabler, kallas för den endimensionella vågekvationen

$f(x, t)$ representerar amplituden av en vibrerande sträng i position x vid tid t .

Man skriver c^2 för att indikera att proportionalitetskonstanten är positiv.

Vågekvationen kan härledas från Newtons 2a lag tillämpad på spänningskraften i strängen. Det kräver en del arbete som ligger utanför denna kurs (se wikipedia tex.)

Vi fokuserar på hur man löser ekvationen. Tricket är att byta variabler till

$$u = x + ct, \quad v = x - ct$$

Med hjälp av kedjeregeln + Clairauts sats kan man visa att PDEn således transformeras till

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = 0$$

(Detaljer finns i boken. Kan läsa själva, ej examinerbar)

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v} = C_1(v)$$

$$\Rightarrow f = C_1^*(v) + C_2^*(u),$$

$$\text{dvs } f(x,t) = C_1^*(x-ct) + C_2^*(x+ct),$$

är den allmänna lösningen, där C_1^* , C_2^* är valfria C^2 -funktioner av en variabel.

Fysikalisk tolkning:

C_1^* är konstant då $x - ct$ hålls konstant. Tolkas som en våg som rör sig till höger med fart c .

PSS, C_2^* tolkas som en våg som rör sig till vänster med fart c .

Den allmänna lösningen är en superposition av 2 sådana vågar.

Taylors Formel och Klassificering av Kritiska Punkter i Flenvariabelanalys

Man hänvisas till de två filerna som finns på hemsidan under "Program, L2".

Fil #1

Vi påminner först läsaren om följande saker från envariabelanalys

- kritisk/stationär punkt
- lokal max/min, terrasspunkt
- Taylors Sats

och sedan utvidgar dessa till funktioner $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ av ett godtyckligt antal variabler.

* Se Fil 1 för detaljerna.

Exempel : Låt $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$
och låt $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ges av

$$f(x, y) = 2y\sqrt{x} - \ln y + x - 3y$$

Bestäm Taylorpolynom av grad 2
till f i punkten $(9, 1)$ och därmed
ett approximativt värde för $f(9.01, 0.98)$

Lösning

$$f(9, 1) = 12$$

$$f_x = \frac{y}{\sqrt{x}} + 1 \stackrel{(9,1)}{=} \frac{4}{3}$$

$$f_y = 2\sqrt{x} - \frac{1}{y} - 3 \stackrel{(9,1)}{=} 2$$

$$f_{xx} = \frac{-y}{2x\sqrt{x}} \stackrel{(9,1)}{=} -\frac{1}{54}$$

$$f_{xy} = f_{yx} = \frac{1}{\sqrt{x}} \stackrel{(9,1)}{=} \frac{1}{3}$$

$$f_{yy} = \frac{1}{y^2} \stackrel{(9,1)}{=} 1$$

Taylorpolynom $P(h, k)$ av grad 2
i punkten (a, b) lyder :

→

$$P(h, k) = f(a, b) + [h f_x(a, b) + k f_y(a, b)] \\ + \frac{1}{2} [h^2 f_{xx}(a, b) + 2hk f_{xy}(a, b) + k^2 f_{yy}(a, b)]$$

Insättning vid (9,1) $\Rightarrow$

$$P(h, k) = 12 + \left(\frac{4h}{3} + 2k \right) \\ + \frac{1}{2} \left(-\frac{h^2}{54} + \frac{2}{3} hk + k^2 \right)$$

$$\Rightarrow P(h, k) = 12 + \frac{4h}{3} + 2k - \frac{h^2}{108} + \frac{hk}{3} + \frac{k^2}{2}$$

Approximationen : $h = 0.01, k = -0.02$

$$\Rightarrow f(1.01, 0.98) \approx P(0.01, -0.02)$$

$$= 12 + \frac{0.04}{3} - 0.04 - \frac{0.0001}{108} - \frac{0.0002}{3} + \frac{0.0004}{2}$$

Behöver inte räknas ut.

Fil # 2

Vi går igenom denna fil fram till "Mahisformulering". Stycket därefter är frivilligt (ej examinerbar).

Målet är att bevisa Sats 2. Notera

att denna sats står ej explicit i boken, vilket egentligen är en miss. Man kan säga att de i boken återupprepar resonemangen bakom beviset av Sats 2 (i synnerhet idéerna i Sats 1) i varje exempel.

De flesta Calculus böcker innehåller en formulering av Sats 2.

Matrisformuleringen är det mest eleganta sättet att presentera generaliseringen till ett godtyckligt antal variabler, men för att kunna förstå det bra borde man ha koll på begreppen egenvärde/egenvektor/diagonalisering (av symmetriska matriser) från linjär algebra. Det materialet har ni inte haft i första lin. alg. kurs utan kommer i Lp 4.

Ex. 1 Tag samma funktion som i förra exemplet

$$f(x, y) = 2y\sqrt{x} - \ln y + x - 3y$$

Om jag i stället sätter

$$f(x, y) = 2y\sqrt{x} - \ln |y| + x - 3y,$$

så har f samma partiella derivator
($\ln x$ och $\ln|x|$ har samma derivata)
men definitionsmängden inkluderar även
negativa y -värden (ej $y=0$).

Vi ska se nedan varför jag gör detta *

Nu vill jag bestämma och klassificera
alla f s kritiska punkter:

Kritiska Punkter:

$$f_x = \frac{y}{\sqrt{x}} + 1 = 0 \quad \dots (1)$$

$$f_y = 2\sqrt{x} - \frac{1}{y} - 3 = 0 \quad \dots (2)$$

$$(1) \Rightarrow y = -\sqrt{x} \stackrel{(2)}{\Rightarrow} 2\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 3 = 0$$

$$\text{Sätt } u = \sqrt{x} \Rightarrow 2u^2 - 3u + 1 = 0 \\ \Rightarrow (2u-1)(u-1) = 0$$

$$\Rightarrow u = \frac{1}{2} = \sqrt{x} \Rightarrow x = \frac{1}{4} \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \\ \text{or } u = 1 = \sqrt{x} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = -1$$

$\Rightarrow$ Två kritiska punkter: $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$
 $(1, -1)$ *

Med ursprungliga f
hade detta ej varit en
kritisk punkt, ty ligger
utanför $D(f)$.
 $\nwarrow y < 0$

Klassificering

Kom ihåg:

$$f_{xx} = -y / 2\sqrt{x}$$

$$f_{xy} = 1/\sqrt{x}$$

$$f_{yy} = 1/y^2$$

Punkt	A = f_{xx}	B = f_{xy}	C = f_{yy}	$AC - B^2$	Klas
$(1/4, -1/2)$	$2 > 0$	2	4	$4 > 0$	lok min
$(1, -1)$	$1/2 > 0$	1	1	$-1/2 < 0$	sadel

Ex. 2 Finn och klassificera alla kritiska punkterna till

$$f(x, y) = x^3 - 2y^2 - 2y^4 + 3x^2y$$

Lösning:

$$f_x = 3x^2 + 6xy = 0 \quad \dots (1)$$

$$f_y = -4y - 8y^3 + 3x^2 = 0 \quad \dots (2)$$

$$(1) \Rightarrow 3x(x + 2y) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ or } x = -2y$$

Fall 1 $x = 0$

$$(2) \Rightarrow 0 = 4y + 8y^3 \\ = 4y(1 + 2y^2) = 0$$

$$\Rightarrow y = 0 \text{ or } 1 + 2y^2 = 0, \text{ omöjligt}$$

$\Downarrow$ $(0,0)$ kritisk punkt

Fall 2 $x = -2y$

$$(2) \Rightarrow -4y - 8y^3 + 12y^2 = 0 \\ -4y(1 + 2y^2 - 3y) = 0$$

$$\Rightarrow y = 0 \text{ eller } 2y^2 - 3y + 1 = 0$$

$\Downarrow$
 $(0,0)$
redan
upptäckt

$$\Downarrow \\ x = -2y \quad y = 1 \text{ eller } y = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow x = -2 \text{ eller } x = -1$$

$(-2,1)$ & $(-1, \frac{1}{2})$ kritiska punkter

Klassificering

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 6x + 6y \\ f_{xy} &= f_{yx} = 6x \\ f_{yy} &= -4 - 24y^2 \end{aligned}$$

Punkt	$A = f_{xx}$	$B = f_{xy}$	$C = f_{yy}$	$AC - B^2$	Klass
$(-2, 1)$	$-6 < 0$	-12	-28	$24 > 0$	lok max
$(-1, \frac{1}{2})$	$-3 < 0$	-6	-10	$-6 < 0$	sadel
$(0, 0)$	0	0	-4	0	okänd

Poängen med detta exempel är alltså att vi har ett fall där Sats 2 ger inget svar.

Så vi i stället undersöker $f(x, y)$ direkt för (x, y) nära $(0, 0)$.

Konstatera t.ex. att

$$f(\varepsilon, 0) = \varepsilon^3 \begin{cases} > 0, & \text{då } \varepsilon > 0 \\ < 0, & \text{då } \varepsilon < 0 \end{cases}$$

Så f kan vara både positiv och negativ godtyckligt nära $(0, 0)$, och $f(0, 0) = 0 \Rightarrow$ varken lok. max. eller lok. min i $(0, 0) \Rightarrow (0, 0)$ är en sadelpunkt.

1997 11 30 10:30 10:45 10:50 11:00

1997 11 30 10:55 11:10 11:25 11:40 11:55

1997 11 30 12:00 12:15 12:30 12:45 13:00

1997 11 30 13:05 13:20 13:35 13:50 14:05

1997 11 30 14:10 14:25 14:40 14:55 15:10

1997 11 30 15:15 15:30 15:45 16:00 16:15

1997 11 30 16:20 16:35 16:50 17:05 17:20

1997 11 30 17:25 17:40 17:55 18:10 18:25

1997 11 30 18:30 18:45 19:00 19:15 19:30

1997 11 30 19:35 19:50 20:05 20:20 20:35

1997 11 30 20:40 20:55 21:10 21:25 21:40

1997 11 30 21:45 22:00 22:15 22:30 22:45

1997 11 30 22:50 23:05 23:20 23:35 23:50

1997 11 30 23:55 00:10 00:25 00:40 00:55

1997 11 30 01:00 01:15 01:30 01:45 02:00

1997 11 30 02:05 02:20 02:35 02:50 03:05

1997 11 30 03:10 03:25 03:40 03:55 04:10

1997 11 30 04:15 04:30 04:45 05:00 05:15

1997 11 30 05:20 05:35 05:50 06:05 06:20

1997 11 30 06:25 06:40 06:55 07:10 07:25

1997 11 30 07:30 07:45 08:00 08:15 08:30

1997 11 30 08:35 08:50 09:05 09:20 09:35

1997 11 30 09:40 09:55 10:10 10:25 10:40

1997 11 30 10:45 11:00 11:15 11:30 11:45

1997 11 30 11:50 12:05 12:20 12:35 12:50

1997 11 30 12:55 13:10 13:25 13:40 13:55