Föreläsningar # 7, 8 (Kap. 3.2 - 3.4)

Vektorvärda funktioner

Hittills har vi fokuserat på skalärvärda funktioner av flera variabler, dvs funktioner $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ där $m = 1$.

En del resultat kan enkelt generaliseras till vektorvärda funktioner, dvs kan formuleras för godtyckligt $m \in \mathbb{N}$. Det kräver väsentligen bara <u>linjär algebra</u>

Vi går igenom dessa generaliseringar nu.

<u>Notation</u>: $\mathbb{F}, \mathbb{G}, \ldots$ betecknar vektorvärda funktioner

$$\mathbb{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

$$\mathbb{F}(x_1, \ldots, x_n) = (F_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, F_m(x_1, \ldots, x_n))$$

Så varje $F_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ är en skalärvärd funktion av n variabler.

1 Differentierbarhet

<u>Def</u>: Låt $\mathbb{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\mathbb{F} = (F_1, \ldots, F_m)$. $\mathbb{F}$ sägs vara <u>differentierbar</u> i punkten $\mathbb{a} \in \mathbb{R}^n$ om varje F_i är det.

2) <u>Linjärisering</u>

Låt $\mathbb{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vara diffbar i punkten ~~och~~ $a \in \mathbb{R}^n$. Då är varje F_i diffbar i $x = a$ så det finns funktioner $\rho_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sådana att

$$F_i(a + \mathbb{h}) = F_i(a) + \nabla F_i(a) \cdot \mathbb{h} + \|\mathbb{h}\| \rho_i(\mathbb{h})$$

där $\rho_i(\mathbb{h}) \to 0$ då $\mathbb{h} \to \mathbb{0}_n$ ...(*)

Detta gäller för $i = 1, 2, \ldots, m$.

· Skriv nu $\mathbb{F}$ som en kolonnvektor

$$\mathbb{F}(x_1, \ldots, x_n) = \mathbb{F}(\mathbb{x}) = \begin{bmatrix} F_1(\mathbb{x}) \\ \vdots \\ F_m(\mathbb{x}) \end{bmatrix}$$

- Kom ihåg att en skalärprodukt av 2 vektorer kan betraktas som en matrismultiplikation av en rad med en kolonn:

$$\mathbb{x} \cdot \mathbb{y} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$