Föreläsningar #7, 8 (Kap. 3.2 - 3.4)

Vektorvärda funktioner

Hittills har vi fokuserat på skalärvärda funktioner av flera variabler, dvs funktioner $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ där $m = 1$.

En del resultat kan enkelt generaliseras till vektorvärda funktioner, dvs kan formuleras för godtyckligt $m \in \mathbb{N}$. Det kräver väsentligen bara linjär algebra

Vi går igenom dessa generaliseringar nu.

Notation: $\mathbb{F}, \mathbb{G}, \ldots$ betecknar vektorvärda funktioner

$$\mathbb{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

$$\mathbb{F}(x_1, \ldots, x_n) = (F_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, F_m(x_1, \ldots, x_n))$$

Så varje $F_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ är en skalärvärd funktion av n variabler.

1 Differentierbarhet

Def: Låt $\mathbb{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\mathbb{F} = (F_1, \ldots, F_m)$. $\mathbb{F}$ sägs vara differentierbar i punkten $\mathbb{a} \in \mathbb{R}^n$ om varje F_i är det.

Linjärisering

Låt $\mathbb{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vara diffb
~~den~~ punkten $a \in \mathbb{R}^n$. Då är varje
diffbar i $x = a$ så det finns
funktioner $\rho_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ så

$$F_i(a + h) = F_i(a) + \nabla F_i(a) \cdot [$$

där $\rho_i(h) \to 0$ då $h \to 0$

Detta gäller för $i = 1, 2, \ldots, m$.

Skriv nu $\mathbb{F}$ som en kolonnvek

$$\mathbb{F}(x_1, \ldots, x_n) = \mathbb{F}(\mathbb{X}) = \begin{bmatrix} F_1(\mathbb{X} \\ \vdots \\ F_m(\mathbb{X} \end{bmatrix}$$

- Kom ihåg att en skalärprod
av 2 vektorer kan betrakt
en matrismultiplikation av en
med en kolonn:

$$\mathbb{X} \cdot \mathbb{Y} = [x_1 \; x_2 \ldots x_n] \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

- Skriv alla vektorer som kolonner:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}$$

samt sätt

$$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{h}) \overset{def}{=} \begin{bmatrix} \rho_1(\mathbf{h}) \\ \vdots \\ \rho_m(\mathbf{h}) \end{bmatrix}$$

- Slutligen gör vi följande definition:

<u>Def</u> Låt $\mathbb{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\mathbb{F} = (F_1, \dots, F_m)$ vara differentierbar i $x = \mathbf{a}$.
<u>Funktionalmatrisen</u> $D\mathbb{F}(\mathbf{a})$ är $m \times n$ matrisen vars (i,j):te element är $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\mathbf{a})$

Om vi då staplar de m ekvationerna $(*)_i$ ovanpå varandra, för $i = 1, \dots, m$ från topp till botten, så får vi följande ekvation mellan <u>matriser</u>:

$\longrightarrow$

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbb{F}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = \mathbb{F}(\mathbf{a}) + D\mathbb{F}(\mathbf{a}) * \mathbf{h} + \|\mathbf{h}\|\rho(\mathbf{h}), \\ \text{där } \rho(\mathbf{h}) \to \mathbf{0}_m \text{ då } \mathbf{h} \to \mathbf{0}_n \\ \text{och } * \text{ betyder matrismultiplikation} \end{array}}$$

Detta är linjäriseringsformeln för godtyckligt differentierbara vektorvärda funktioner $\mathbb{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

OBS! Ett alternativt namn för en funktionalmatris är en Jacobimatris

Exempel Bestäm funktionalmatrisen till $\mathbb{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ som ges av

$$\mathbb{F}(x,y) = (x^2 y,\ x \ln y,\ x + 2y)$$

Bestäm speciellt $D\mathbb{F}(3,1)$ och därmed ett approximativt värde för $\mathbb{F}(3.03, 0.99)$

Lösning

$$D\mathbb{F} = \begin{bmatrix} \partial F_1/\partial x & \partial F_1/\partial y \\ \partial F_2/\partial x & \partial F_2/\partial y \\ \partial F_3/\partial x & \partial F_3/\partial y \end{bmatrix}$$

$\longrightarrow$

$$= \begin{bmatrix} 2xy & x^2 \\ \ln y & x/y \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\overset{(3,1)}{=} \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Tag $\mathbb{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbb{h} = \begin{bmatrix} 0.03 \\ -0.01 \end{bmatrix}$

För approximationen så struntar vi i feltermen i linjäriseringen och får

$$\mathbb{F}(\mathbb{a}+\mathbb{h}) \approx \mathbb{F}(\mathbb{a}) + D\mathbb{F}(\mathbb{a}) * \mathbb{h}$$

$$\Rightarrow \mathbb{F}\begin{bmatrix} 3.03 \\ 0.99 \end{bmatrix} \approx \mathbb{F}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.03 \\ -0.01 \end{bmatrix}$$

där $\mathbb{F}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(3,1) \\ F_2(3,1) \\ F_3(3,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \mathbb{F}\begin{bmatrix} 3.03 \\ 0.99 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.03 \\ -0.01 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.09 \\ -0.03 \\ 5.01 \end{bmatrix}$$

③ Kedjeregeln

Nu betraktar vi sammansättningar av godtyckliga differentierbara vektorvärda funktioner

$$\mathbb{G} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$$
$$\mathbb{F} : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^m$$

Som vi konstaterade tidigare måste $p = q$ för att sammansättningen $\mathbb{F} \circ \mathbb{G}$ ska vara definierad, och då gäller $\mathbb{F} \circ \mathbb{G} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Som vi skrev tidigare:

$$\mathbb{G}(t_1, \dots, t_n) = (G_1(t_1, \dots, t_n), \dots, G_p(t_1, \dots, t_n))$$

$$\mathbb{F}(x_1, \dots, x_p) = (F_1(x_1, \dots, x_p), \dots, F_m(x_1, \dots, x_p))$$

$$\Rightarrow (\mathbb{F} \circ \mathbb{G})(t_1, \dots, t_n) =$$

$$(F_1(G_1(t_1, \dots, t_n), \dots, G_p(t_1, \dots, t_n)), \dots,$$
$$F_m(G_1(t_1, \dots, t_n), \dots, G_p(t_1, \dots, t_n)))$$

Det är bra att kunna använda mer vektornotation: $\mathbb{t} = (t_1, \dots, t_n)$, $x = (x_1, \dots, x_p)$

$$\mathbb{F}(\mathbb{G}(\mathbb{t})) = (\mathbb{F} \circ \mathbb{G})(\mathbb{t})$$

Om nu $\mathbb{F}$ och $\mathbb{G}$ är differentierbara så innebär det per definition att varje komponent-funktion $F_1, \ldots, F_m$ samt $G_1, \ldots, G_p$ är diffbar.

Den i:te komponenten av $\mathbb{F} \circ \mathbb{G}$ ges av

$$(\mathbb{F} \circ \mathbb{G})_i (t_1, \ldots, t_n)$$

$$= F_i\left(G_1(t_1, \ldots, t_n), \ldots, G_p(t_1, \ldots, t_n)\right)$$

Enligt Kedjeregeln, Steg 3, är detta också en differentierbar funktion av $t_1, \ldots, t_n$ och, för $j = 1, \ldots, n$ gäller:

$$\frac{\partial}{\partial t_j} (\mathbb{F} \circ \mathbb{G})_i = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial F_i}{\partial x_k} (\mathbb{G}(\mathbb{t})) \frac{\partial G_k}{\partial t_j} (\mathbb{t}) \quad \ldots (**)$$

Notera att summan i HL kan betraktas som en skalärprodukt

$$\nabla F_i (\mathbb{G}(\mathbb{t})) \cdot \frac{\partial}{\partial t_j} \mathbb{G}(\mathbb{t})$$

och därmed som en matrisprodukt

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_i}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_i}{\partial x_p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial G_1/\partial t_j \\ \vdots \\ \partial G_p/\partial t_j \end{bmatrix}$$

Det innebär att, för varje $j=1,\dots,n$, kan vi skriva (**) i matrisform som

$$\underbrace{D(\mathbb{F}\circ\mathbb{G})_{ij}}_{\text{i punkten } \mathbb{t}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial F_i}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_i}{\partial x_p} \end{bmatrix}}_{\text{i punkten } \mathbb{G}(\mathbb{t})} \underbrace{\begin{bmatrix} \partial G_1/\partial t_j \\ \vdots \\ \partial G_p/\partial t_j \end{bmatrix}}_{\text{i punkten } \mathbb{t}}$$

Lägger vi ihop dessa för alla i,j $\Rightarrow$

$$\boxed{D(\mathbb{F}\circ\mathbb{G})(\mathbb{t}) = D\mathbb{F}(\mathbb{G}(\mathbb{t})) * D\mathbb{G}(\mathbb{t})}$$

vilket är den mest allmänna formen av Kedjeregeln (Steg 4).

<u>Exempel</u>: Avbildningarna $\mathbb{F}, \mathbb{G} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ges av

$$\mathbb{F}(x_1, x_2) = \left(\sqrt{\frac{x_1+x_2}{2}}, \sqrt{\frac{x_1-x_2}{2}}\right)$$

$$\mathbb{G}(t_1, t_2) = \left(t_1^3 + t_2^3, t_1^3 - t_2^3\right)$$

Bestäm funktionalmatrisen till $\mathbb{F}\circ\mathbb{G}$.

Lösning: Vi tar hjälp av kedjeregeln.

$$DF = \begin{bmatrix} \partial F_1/\partial x_1 & \partial F_1/\partial x_2 \\ \partial F_2/\partial x_1 & \partial F_2/\partial x_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/4 \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^{-1/2} & 1/4 \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^{-1/2} \\ 1/4 \left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^{-1/2} & -1/4 \left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^{-1/2} \end{bmatrix}$$

Tag $\mathbb{x} = \mathbb{G}(\mathbb{t}) \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = t_1^3 + t_2^3 \\ x_2 = t_1^3 - t_2^3 \end{array}$

$$\Rightarrow \frac{x_1+x_2}{2} = t_1^3, \quad \frac{x_1-x_2}{2} = t_2^3$$

(1) $\Rightarrow DF(\mathbb{G}(\mathbb{t})) = 1/4 \begin{bmatrix} t_1^{-3/2} & t_1^{-3/2} \\ t_2^{-3/2} & -t_2^{-3/2} \end{bmatrix}$

Sedan, $D\mathbb{G} = \begin{bmatrix} \partial G_1/\partial t_1 & \partial G_1/\partial t_2 \\ \partial G_2/\partial t_1 & \partial G_2/\partial t_2 \end{bmatrix}$

(2) $\Rightarrow D\mathbb{G}(\mathbb{t}) = \begin{bmatrix} 3t_1^2 & 3t_2^2 \\ 3t_1^2 & -3t_2^2 \end{bmatrix}$

Från (1), (2) och kedjeregeln får vi

$$D(\mathbb{F} \circ \mathbb{G})(\mathbb{t}) = DF(\mathbb{G}(\mathbb{t})) * D\mathbb{G}(\mathbb{t})$$

$$= 3/4 \begin{bmatrix} t_1^{-3/2} & t_1^{-3/2} \\ t_2^{-3/2} & -t_2^{-3/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1^2 & t_2^2 \\ t_1^2 & -t_2^2 \end{bmatrix}$$

$$= 3/2 \begin{bmatrix} \sqrt{t_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{t_2} \end{bmatrix}.$$

OBS! Som en kontroll kan vi lösa uppgiften utan kedjeregeln, dvs vi först beräknar sammansättningen explicit och sedan deriverar.

$$(\mathbb{F}\circ\mathbb{G})(t_1,t_2) = \Big(F_1\big(G_1(t_1,t_2), G_2(t_1,t_2)\big), F_2\big(G_1(t_1,t_2), G_2(t_1,t_2)\big)\Big)$$

$$= \Big(F_1\big(t_1^3+t_2^3, t_1^3-t_2^3\big), F_2\big(t_1^3+t_2^3, t_1^3-t_2^3\big)\Big)$$

$$= \left(\sqrt{\frac{(t_1^3+t_2^3)+(t_1^3-t_2^3)}{2}}, \sqrt{\frac{(t_1^3+t_2^3)-(t_1^3-t_2^3)}{2}}\right)$$

$$\Rightarrow (\mathbb{F}\circ\mathbb{G})(t_1,t_2) = \left(t_1^{3/2}, t_2^{3/2}\right)$$

$$\Rightarrow D(\mathbb{F}\circ\mathbb{G})(\mathbb{t}) = \begin{bmatrix} \partial(\mathbb{F}\circ\mathbb{G})_1/\partial t_1, & \partial(\mathbb{F}\circ\mathbb{G})_1/\partial t_2 \\ \partial(\mathbb{F}\circ\mathbb{G})_2/\partial t_1, & \partial(\mathbb{F}\circ\mathbb{G})_2/\partial t_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3/2\, t_1^{1/2} & 0 \\ 0 & 3/2\, t_2^{1/2} \end{bmatrix}$$

$$= 3/2 \begin{bmatrix} \sqrt{t_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{t_2} \end{bmatrix} \quad \text{VSV.}$$

④ <u>Specialfallet $m=n$</u> :

Om $\mathbb{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ är ett differentierbart n-dimensionellt vektorfält, då är $D\mathbb{F}$ en $n \times n$ matris, m.a.o. i varje punkt $\mathbb{a} \in \mathbb{R}^n$ har vi en specifik $n \times n$ matris $D\mathbb{F}(\mathbb{a})$.

Kom ihåg följande fakta från linjär algebra:

<u>Sats</u> Låt A vara en $n \times n$ matris. Då är följande tre påståenden ekvivalenta:

(i) $\det A \neq 0$

(ii) A är inverterbar

(iii) den linjära avbildningen $\mathbb{x} \mapsto A\mathbb{x}$ från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^n$ är bijektiv (dvs både injektiv & surjektiv) och inversavbildningen är $\mathbb{x} \mapsto A^{-1}\mathbb{x}$.

Det finns en version av denna sats i flervariabelanalys, vilken säger att om $D\mathbb{F}(\mathbb{a})$ är en inverterbar matris då är avbildningen $\mathbb{x} \mapsto \mathbb{F}(\mathbb{x})$ bijektiv <u>i en omgivning av</u> $\mathbb{x} = \mathbb{a}$.

För den exakta formuleringen av den

s.k. Inversa Funktionssatsen, se

Sats 3.3.2 i boken. Vi avstår från ett bevis (som är grundat på satsen från linjär algebra men kräver en hel del mer arbete)

OBS! Även om $D\mathbb{F}(\mathbb{a})$ är en inverterbar matris i varje punkt $\mathbb{a}$ så är det inte garanterat att avbildningen $\mathbb{x} \mapsto \mathbb{F}(\mathbb{x})$ är injektiv i hela $\mathbb{R}^n$. För ett motexempel, se Uppgift 3.9(d) i boken, vilket övningsledarna kommer att ta upp nästa vecka.

Avbildningar $\mathbb{x} \mapsto \mathbb{F}(\mathbb{x})$ som är globalt injektiva är dock viktiga för det är sådana avbildningar vi har att göra med när vi gör (globalt giltiga) koordinatbyten/variabelbyten

Innan vi diskuterar dessa, låt mig inte glömma:

Def Låt $\mathbb{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara ett differentierbart vektorfält och

$\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Determinanten till funktionalmatrisen $D\mathbb{F}(\mathbf{a})$ kallas för <u>funktionaldeterminanten</u> till $\mathbb{F}$ i punkten $\mathbf{a}$.

<u>Notation</u>: $d\mathbb{F}(\mathbf{a}) = |D\mathbb{F}(\mathbf{a})| = \det(D\mathbb{F}(\mathbf{a}))$

Så Inversa Funktionssatsen säger att om $d\mathbb{F}(\mathbf{a}) \neq 0$ då är $\mathbf{x} \mapsto \mathbb{F}(\mathbf{x})$ bijektiv i en omgivning av $\mathbf{a}$.

Kom ihåg från linjär algebra att

$$\det(AB) = (\det A)(\det B),$$

så länge A, B är båda $n \times n$ matriser (samma n för båda).

Därför gäller enligt Kedjeregeln, för n-dimensionella vektorfält $\mathbb{F}, \mathbb{G}$ att

$$(\dagger) \quad \boxed{d(\mathbb{F} \circ \mathbb{G})(\mathbf{t}) = d\mathbb{F}(\mathbb{G}(\mathbf{t})) \cdot d\mathbb{G}(\mathbf{t})}$$

vanlig multiplikation av tal

<u>Exempel</u> Kolla att i föregående exempel gäller

$$d(\mathbb{F}\circ\mathbb{G})(\mathbb{t}) = 9/4\sqrt{t_1t_2}$$

$$d\mathbb{F}(\mathbb{G}(\mathbb{t})) = -1/8\,(t_1t_2)^{-3/2}$$

$$d\mathbb{G}(\mathbb{t}) = -18\,(t_1t_2)^2$$

$\Rightarrow$ $(\dagger)$ håller ✓

<u>Anmärkning</u>

I synnerhet innebär $(\dagger)$ att

$$d(\mathbb{F}\circ\mathbb{G})(\mathbb{t}) \neq 0 \iff d\mathbb{F}(\mathbb{G}(\mathbb{t})) \neq 0 \text{ och } d\mathbb{G}(\mathbb{t}) \neq 0 \quad (\dagger\dagger)$$

Man kan enkelt visa att för godtyckliga funktioner f, g $(f: B \to C,\ g: A \to B)$, mellan godtyckliga mängder att

$f \circ g$ injektiv $\Longleftarrow$ f & g injektiva

$\Longrightarrow$ också sant då g är surjektiv.

Dessa observationer är konsekventa med $(\dagger\dagger)$ enligt Inversa Funktionssatsen

Koordinatbyten

När vi byter koordinatsystem i $\mathbb{R}^n$

$$(x_1, \dots, x_n) \longrightarrow (y_1, \dots, y_n)$$

så skriver vi varje ny variabel i termer av de gamla:

$$y_1 = y_1(x_1, \dots, x_n)$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$y_n = y_n(x_1, \dots, x_n)$$

M.a.o. kan vi betrakta bytet som en funktion $\mathbb{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$\mathbb{F}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad \dots \quad (1)$$

För att koordinatbytet ska vara "giltigt" så ska avbildningen $\mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ vara injektiv, dvs ~~varje~~ olika punkter i rummet ska ha olika koordinater oavsett om vi använder system $\mathbb{X}$ eller system $\mathbb{Y}$.

Inversa Funktionssatsen garanterar åtminstone att ett koordinatbyte är giltigt i närheten av en punkt $a \in \mathbb{R}^n$ om $|DF(a)| \neq 0$.

Notation: För koordinat/variabelbyten i $\mathbb{R}^n$ av formen (1) är det vanligt att skriva

$\partial(y)/\partial(x)$

$$DF = \frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \Leftrightarrow (DF)_{ij} = \frac{\partial y_i}{\partial x_j}$$

$$dF = \frac{d(y_1, \dots, y_n)}{d(x_1, \dots, x_n)} = \frac{d(y)}{d(x)}$$

Detta ger ett enkelt sätt att komma ihåg kedjeregeln (se Sats 3.3.1):

$$\frac{\partial(y)}{\partial(t)} = \frac{\partial(y)}{\partial(x)} * \frac{\partial(x)}{\partial(t)}$$

matrismultiplikation.

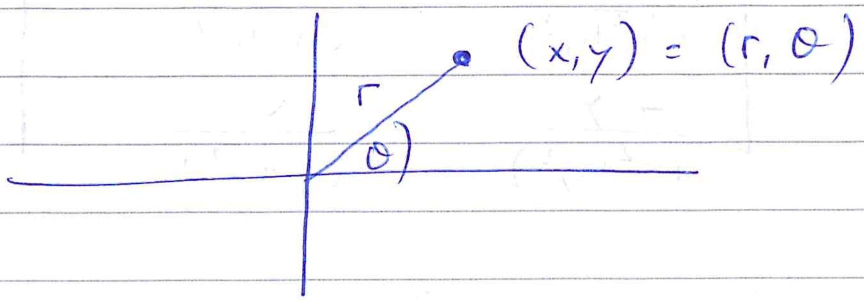
I synnerhet: $\dfrac{d(y)}{d(t)} = \dfrac{d(y)}{d(x)} \cdot \dfrac{d(x)}{d(t)}$

multiplikation av tal

Dessa formler är förstås meningsfulla endast för sammansättningar $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (dvs $p = m = n$)

Exempel 1 Poläre koordinater

$$(x, y) \longleftrightarrow (r, \theta)$$



$$x = r\cos\theta \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$y = r\sin\theta \qquad \theta = \tan^{-1}(y/x)$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{bmatrix} \partial x/\partial r & \partial x/\partial\theta \\ \partial y/\partial r & \partial y/\partial\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d(x,y)}{d(r,\theta)} = r} \quad \ldots \quad (1)$$

Notera att determinanten $\neq 0$ utanför $(0,0)$. Koordinatbytet är också giltigt utanför $(0,0)$: vinkeln kan inte specificeras i $(0,0)$.

Man kan också räkna åt andra hållet (lite svårare beräkningen):

$\longrightarrow$

$$\frac{\partial(r,\theta)}{\partial(x,y)} = \begin{bmatrix} \partial r/\partial x & \partial r/\partial y \\ \partial\theta/\partial x & \partial\theta/\partial y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{(x^2+y^2)} & \frac{x}{(x^2+y^2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x/r & y/r \\ -y/r^2 & x/r^2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d(r,\theta)}{d(x,y)} = \frac{(x^2+y^2)}{r^3} = 1/r$$

Notera att, som förväntat:

$$\frac{d(x,y)}{d(r,\theta)} \cdot \frac{d(r,\theta)}{d(x,y)} = 1$$

Man kan också kolla att

$$\left(\frac{\partial(r,\theta)}{\partial(x,y)}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} x/r & y/r \\ -y/r^2 & x/r^2 \end{bmatrix}^{-1}$$

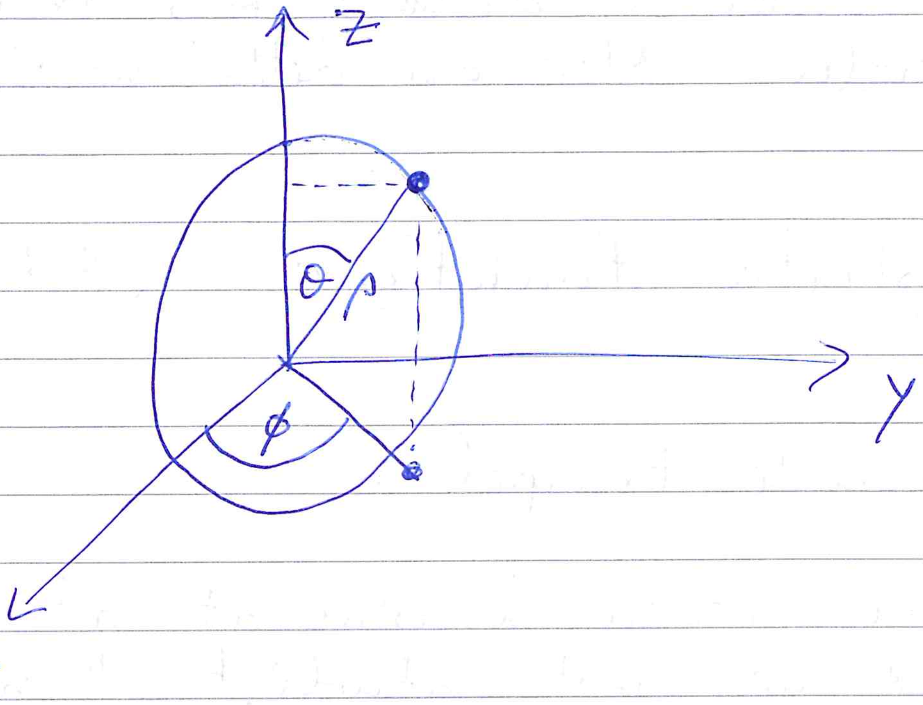
$$= \left(\text{kom ihåg: } \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \right)$$

$$= r \begin{bmatrix} x/r^2 & -y/r \\ y/r^2 & x/r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x/r & -y \\ y/r & x \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \quad \text{v.s.v.}$$

Exempel 2 Sfäriska koordinater

$(x, y, z) \longleftrightarrow (\rho, \theta, \phi)$



$$x = \rho \sin\theta \cos\phi$$
$$y = \rho \sin\theta \sin\phi$$
$$z = \rho \cos\theta$$

Man kan kolla (se Ex. 13, s. 141 i boken) att

$$\boxed{\frac{d(x,y,z)}{d(\rho,\theta,\phi)} = \rho^2 \sin\theta} \quad \ldots (2)$$

I synnerhet är determinanten nollskild utanför z-axeln ($\theta \in \{0, \pi\}$). Notera att ϕ kan ej specificeras på z-axeln så koordinatbytet är ogiltigt där.

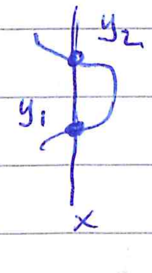
Formler (1) resp. (2) har viktiga tolkningar då vi byter från Cartesiska till polära resp. sfäriska koordinater i dubbel resp. trippel integralen. Mer om detta nästa vecka!

Implicita Funktioner (§3.4)

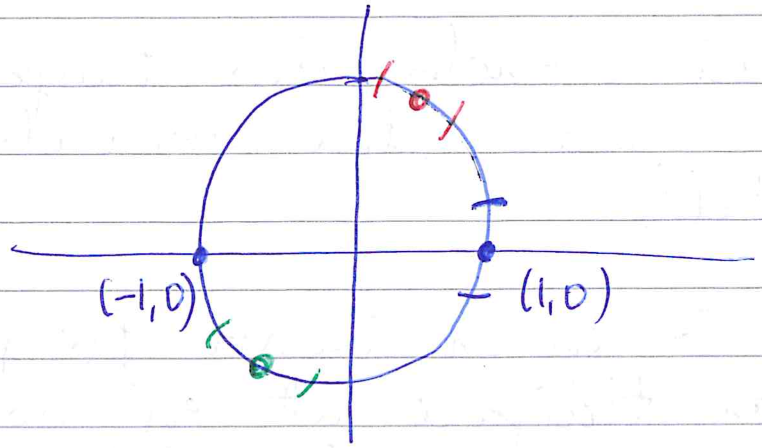
Motiverande Exempel:

Vi har redan konstaterat att det ibland är mest naturligt att betrakta en kurva i xy-planet inte som en del av en funktionsgraf $y = f(x)$ utan som en nivåkurva till en funktion av 2 variabler: $f(x,y) = c$.

Notera att i det första fallet är $y = f(x)$ entydigt definierad i termer av x, så man kan ej ha typ



Ex: $f(x,y) = x^2 + y^2$. För varje $c > 0$ är nivåkurvan $x^2 + y^2 = c$ en cirkel. För enkelhetsskull, betrakta $c = 1$.



Man kan eliminera y från ekvationen och får $y = \pm\sqrt{1-x^2}$.

Så y är inte entydigt definierad i termer av x.

Men "lokalt" så är de enda problematiska punkterna $(\pm 1, 0)$.

- I varje punkt (x,y) på cirkeln med $y>0$ kan vi skriva $y = g_1(x) = +\sqrt{1-x^2}$ och den formeln är giltigt i <u>någon</u> omgivning av punkten

- PSS kan vi skriva $y = g_2(x) = -\sqrt{1-x^2}$, vilket är lokalt giltigt på cirkelns undre halva.

- Dock finns det ingen omgivning av $(\pm 1, 0)$ där y är entydigt bestämt av x
Notera att dessa är de enda från

punkterna på cirkeln där tangenten är vertikal, m.a.o. där normalen är horisontell.

Ty cirkeln är en nivåkurva $f(x,y) = 1$, vet vi sedan tidigare att en normal till kurvan ges av $\nabla f = (f_x, f_y)$.

Alltså: $f(x,y) = x^2 + y^2$
$\Rightarrow \nabla f = (2x, 2y)$

Horisontell normal $\Longleftrightarrow$ ∇f horisontell
$\Updownarrow$ $\Longleftrightarrow$ y-cpt av $\nabla f = 0$
y ej en entydig funktion av x i en omgivning $\Longleftrightarrow$ $f_y = 0$
$\Longleftrightarrow$ $y = 0$
$\Longleftrightarrow$ $\pm(1,0)$ på cirkeln

Som en sista "hint" på vart vi är på väg, tänk på hur du hade i envariabelanalys beräknat tangentens lutning i en godtycklig punkt på cirkeln. Du hade tagit cirkelns ekvation:

$$x^2 + y^2 = 1,$$

betraktat y som en "implicit" funktion av x och "deriverat implicit" båda leden m.a.p. x. På så sätt får man, enligt kedjeregeln, att

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$\Rightarrow$ Tangentens lutning $= dy/dx$
$= -\dfrac{2x}{2y}$

Beräkningen är giltigt förutom då $y=0$, dvs (Lo and Behold!!) förutom i de två problematiska punkterna $(\pm 1, 0)$ där y ej kan bestämmas entydigt i termer av x.

Notera att $dy/dx = -\dfrac{f_x}{f_y}$ $\quad (f(x,y) = x^2+y^2)$

vilket är formellt vad kedjeregeln skulle ge (Steg 2) då vi förutsätter att y är en funktion av x:

ej samma g_1, g_2 som tidigare

$$f(x,y) = 1 \iff f(x, y(x)) = 1$$
$$\iff f(g_1(x), g_2(x)) = 1$$

[dvs: $g_1(x) = x$, $g_2(x) = y$]

$\Rightarrow$ (Steg 2) $\quad 0 = \dfrac{df}{dx} = \dfrac{\partial f}{\partial x} g_1'(x) + \dfrac{\partial f}{\partial y} g_2'(x)$

$\Rightarrow 0 = 1 \cdot f_x + \left(\dfrac{dy}{dx}\right) \cdot f_y \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-f_x}{f_y}$

Dessa observationer om enhetscirkeln kan generaliseras till:

Sats 3.4.3 (Implicita Funktionssatsen för 2 variabler)

Låt $F(x,y)$ vara en C^1-funktion av 2 variabler och (a,b) en punkt på nivåkurvan $F(x,y) = C$. Om

$$F_y(a,b) \neq 0,$$

så finns det en öppen omgivning U av (a,b) sådan att restriktionen av nivåkurvan till U implicit definierar en C^1-funktion $y = f(x)$. För derivatan av denna funktion gäller

$$f'(x) = -F_x / F_y$$

Bevis Kedjeregeln m.m. Vi avstår

Exempel (variant på 3.31 i boken)

(a) Visa med hjälp av IFS att villkoret $y^3 - 3y = x$ entydigt definierar $y = f(x)$ nära $(2,2)$.

(b) Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 till f i $(2,2)$.

Lösning Sätt $F(x,y) = y^3 - 3y - x$.

$F_x = -1$, $F_y = 3y^2 - 3$

I punkten $(2,2)$ (vilket vi noterar är en punkt som uppfyller $y^3 - 3y = x$) har vi då

$$F_y = 3(2^2) - 3 = 9 \neq 0$$

$F_y \neq 0 \overset{IFS}{\Rightarrow} y = f(x)$ i en omgivning av $(2,2)$

För Taylorpolynomet måste vi beräkna $f(2)$, $f'(2)$, $f''(2)$.

Vi vet redan att $f(2) = y = 2$

IFS $\Rightarrow$ $f'(2) = \dfrac{-F_x(2,2)}{F_y(2,2)} = +1/9$.

Sedan: $f''(x) = \dfrac{d}{dx}\left(-F_x / F_y\right)$

$$= \frac{-F_y \frac{d}{dx}(F_x) + F_x \frac{d}{dx}(F_y)}{F_y^2} \overset{(2,2)}{=} \frac{-9\frac{d}{dx}(F_x) - 1 \cdot \frac{d}{dx}F_y}{81}$$

Vi har sedan tidigare:

$$F_x = -1, \quad F_y = 3y^2 - 3$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx} F_x = 0$$

$$\frac{d}{dx} F_y = \frac{d}{dx}(3y^2 - 3)$$

$$\overset{\text{Kedje}}{=} 6y \, \frac{dy}{dx}$$

$$= 6y \, f'(x)$$

$$\overset{(2,2)}{=} 6 \cdot 2 \cdot \frac{1}{9}$$

Alltså: $f''(2) = \dfrac{-1 \cdot 6 \cdot 2 \cdot \frac{1}{9}}{81} = \dfrac{-4}{243}$

Taylorpolynomet av grad 2 lyder:

$$P(h) = f(2) + \frac{f'(2)}{1!} h + \frac{f''(2)}{2!} h^2$$

$$P(h) = 2 + \frac{h}{9} - \frac{2h^2}{243}$$: Svar

IFS för n variabler

Låt $F(x_1, \dots, x_n)$ vara en C^1-funktion av n variabler och $(a_1, \dots, a_n)$ en punkt på nivå(hyper)ytan $F(x_1, \dots, x_n) = C$. Om

$$\frac{\partial F}{\partial x_k}(a_1, \dots, a_n) \neq 0,$$

då finns det en öppen omgivning U av $(a_1, \dots, a_n)$ s.a. restriktionen av nivåytan till U implicit definierar en C^1-funktion av $n-1$ variabler

$$x_k = f_k(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)$$

För denna funktions partiella derivator gäller:

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_i} = \frac{-\partial F / \partial x_i}{\partial F / \partial x_k}$$

Exempel: Visa att ekvationen $e^{xyz} = z - x - y$ implicit definierar en funktion $z = f(x,y)$ i en omgivning av $(0,1,2)$ och bestäm f_x, f_y, f_{xx}.

Lösning:

Sätt $F(x,y,z) = e^{xyz} - z + x + y$

(så att ekvationen lyder $F(x,y,z) = 0$).

$F_x = yze^{xyz} + 1 \overset{(0,1,2)}{=} 3$

$F_y = xze^{xyz} + 1 \overset{(0,1,2)}{=} 1$

$F_z = xye^{xyz} - 1 \overset{(0,1,2)}{=} -1$

$F_z(0,1,2) \neq 0 \overset{IFS}{\Longrightarrow} z = f(x,y)$ i en omgivning och

$$f_x = -\frac{F_x}{F_z} \overset{(0,1,2)}{=} -3$$

$$f_y = -\frac{F_y}{F_z} \overset{(0,1,2)}{=} 1$$

Sedan: $f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} f_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{F_x}{F_z}\right)$

$$= \frac{-F_z \frac{\partial F_x}{\partial x} + F_x \frac{\partial F_z}{\partial x}}{F_z^2} \overset{(0,1,2)}{=} \frac{\partial F_x}{\partial x} + 3\frac{\partial F_z}{\partial x} = f_{xx} \quad \ldots (1)$$

Först: $\frac{\partial F_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(yze^{xyz} + 1\right)$

$$= y \frac{\partial}{\partial x}\left(z e^{xyz}\right)$$

(Tänk på att $z = f(x,y)$ beror på x)

$$= y\left[z \cdot y \cdot e^{xyz} \cdot (x f_x + z) + e^{xyz} \cdot f_x\right]$$

$$= y e^{xyz}\left[yz(x f_x + z) + f_x\right]$$

$$\overset{(0,1,2)}{=} 1 \cdot e^0 \left[1 \cdot 2 \cdot (0 \cdot (-3) + 2) + (-3)\right]$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial x} = 1 \quad \ldots \quad (2)$$

Och: $\dfrac{\partial F_z}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(xy e^{xyz} - 1\right)$

(Tänk igen på att $z = f(x,y)$ beror på x)

$$= y \frac{\partial}{\partial x}\left(x e^{xyz}\right)$$

$$= y\left[x \cdot e^{xyz} \cdot y \cdot (x f_x + z) + e^{xyz} \cdot 1\right]$$

$$= y e^{xyz}\left[xy(x f_x + z) + 1\right]$$

$$\overset{(0,1,2)}{=} 1 \cdot e^0 \left[0 \cdot 1 \cdot (0 \cdot (-3) + 2) + 1\right]$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial x} = 1 \quad \ldots \quad (3)$$

Sätt (2), (3) in i (1) $\Rightarrow$ $f_{xx} = 4$: Svar