Demonstration 2

MVE035/MVE600 - Flervariabelanalys

Hampus Renberg Nilsson, MSc.
Hampus.Renberg.Nilsson@chalmers.se

Våren 2021

Dagens genomgång: 2.34, extra, 2.62b, 2.67, 2.70.

Uppgift 2.34

Betrakta funktionen $f(x, y) = xy \sin x$ i punkten $(\pi/2, 1)$.

a) I vilken riktning växer f snabbast? Hur stor är tillväxten i denna riktning?

b) Beräkna riktningsderivatan av f i riktningen $(-3, 4)$.

c) Bestäm tangentplanet till ytan $z = f(x, y)$ i den punkt på ytan där $x = \pi/2$ och $y = 1$.

Lösning a)

En funktion växer snabbast i gradientens riktning.

Gradienten ∇f är en vektor av de partiella derivatorna, dvs.

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right), \tag{1}$$

så låt oss beräkna de partiella derivatorna. För x-derivatan får vi använda produktregeln,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \sin x + xy \cos x, \tag{2}$$

medan för y-derivatan är det enklare,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \sin x, \tag{3}$$

eftersom funktionen bara är y gånger en konstant.

Gradienten är således

$$\nabla f = (y \sin x + xy \cos x, x \sin x) \, . \tag{4}$$

Riktningen som f växer snabbast i är alltså

$$\nabla f(\pi/2, 1) = \Big(1 \cdot \sin(\pi/2) + \frac{\pi}{2} \cdot 1 \cdot \cos(\pi/2) \, , \frac{\pi}{2} \sin(\pi/2)\Big) = \Big(1, \frac{\pi}{2}\Big) \, . \tag{5}$$

Tillväxten ges av $|\nabla f(\pi/2, 1)| = \sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2}$.

Lösning b)

Riktningsderivatan i allmänhet i riktning $\vec{v}$ ges av

$$f'_{\vec{v}} = \nabla f \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}. \tag{6}$$

I vårt fall har vi alltså

$$f'_{\vec{v}} = \left(1, \frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{(-3, 4)}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2}} = \frac{-3 + 2\pi}{5}. \tag{7}$$

Lösning c)

Funktionsvärdet $z_0 = f(x_0, y_0)$ i punkten är $f(\pi/2, 1) = \frac{\pi}{2} \cdot 1 \cdot \sin(\pi/2) = \frac{\pi}{2}$.

Tangentplanet ges av

$$\begin{aligned} & z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0), \\ \implies & z - \frac{\pi}{2} = 1 \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}(y - 1), \\ \implies & z = x + \frac{\pi}{2} y - \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \tag{8}$$

Extra

Om $x = \mathrm{e}^s \cos t, y = \mathrm{e}^s \sin t$ och $f(x, y) = f(x(s, t), y(s, t))$ är en $\mathcal{C}^2$-funktion, visa att

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \left(x^2 + y^2\right) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right). \tag{9}$$

Lösning

Varning för rörig uppgift!

Några samband vi kommer att använda mycket är derivatorna av x, y m.a.p. s, t, så låt oss beräkna dessa nu,

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \mathrm{e}^s \cos t = x, \quad \frac{\partial y}{\partial s} = \mathrm{e}^s \sin t = y, \quad \frac{\partial x}{\partial t} = -\mathrm{e}^s \sin t = -y, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \mathrm{e}^s \cos t = x. \tag{10}$$

Låt oss nu beräkna första derivatan av f m.a.p. s. För att göra detta använder vi kedjeregeln och får

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}. \tag{11}$$

För att sedan beräkna andraderivatan får vi först använda oss av produktregeln,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} = \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right) &= \frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial y} \\ &= x\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial y}, \end{aligned} \tag{12}$$

och sedan kedjeregeln på uttrycken

$$\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial s} = x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} \tag{13}$$

och

$$\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial s} = x\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \tag{14}$$

Alltså har vi att

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} &= x\frac{\partial f}{\partial x} + x\left(x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\right) + y\frac{\partial f}{\partial y} + y\left(x\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\\ &= x\frac{\partial f}{\partial x} + x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + xy\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + xy\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.\end{aligned} \tag{15}$$

Låt oss nu beräkna första derivatan av f m.a.p. t. För att göra detta använder vi, liksom tidigare, kedjeregeln och får

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = -y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y}. \tag{16}$$

För att sedan beräkna andraderivatan får vi först, liksom tidigare, använda oss av produktregeln,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(-y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y}\right) &= -\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial y}\\ &= -x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial y},\end{aligned} \tag{17}$$

och sedan kedjeregeln på uttrycken

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial t} = -y\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + x\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} \tag{18}$$

och

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial t} = -y\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + x\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \tag{19}$$

Alltså har vi att

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= -x\frac{\partial f}{\partial x} - y\left(-y\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + x\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\right) - y\frac{\partial f}{\partial y} + x\left(-y\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + x\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\\ &= -x\frac{\partial f}{\partial x} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - xy\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} - xy\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + x^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.\end{aligned} \tag{20}$$

Nu sätter vi samman dessa uttryck och får

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= \cancelto{0}{x\frac{\partial f}{\partial x}} + x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \cancelto{0}{xy\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}} + \cancelto{0}{y\frac{\partial f}{\partial y}} + \cancelto{0}{xy\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\\ &\quad \cancelto{0}{-x\frac{\partial f}{\partial x}} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cancelto{0}{- xy\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}} \cancelto{0}{- y\frac{\partial f}{\partial y}} \cancelto{0}{- xy\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}} + x^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\\ &= x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + x^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\\ &= \left(x^2 + y^2\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\end{aligned} \tag{21}$$

vilket skulle bevisas.

Uppgift 2.62b

Taylorutveckla funktionen

$$f(x,y) = \sqrt{1+x+y} \tag{22}$$

kring (1,0) t.o.m. andragradstermer.

Lösning

Taylors formel till andra ordningen i två variabler ges av

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + f'_x(a,b)h + f'_y(a,b)k + \frac{1}{2}f''_{xx}(a,b)h^2 + f''_{xy}(a,b)hk + \frac{1}{2}f''_{yy}(a,b)k^2. \tag{23}$$

Låt oss beräkna de partiella derivatorna,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{1+x+y}}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{4(1+x+y)^{3/2}}. \tag{24}$$

I punkten (1,0) är dessa lika med

$$f'_x(1,0) = f'_y(1,0) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \text{resp.} \quad f''_{xx}(1,0) = f''_{xy}(1,0) = f''_{yy}(1,0) = -\frac{1}{4\cdot 2^{3/2}} = -\frac{1}{8\sqrt{2}}. \tag{25}$$

Taylorutvecklingen är alltså

$$f(1+h,k) \approx \sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}(h+k) - \frac{1}{16\sqrt{2}}\left(h^2+2hk+k^2\right). \tag{26}$$

Uppgift 2.67

Bestäm alla lokala extrempunkter till

$$f(x,y) = x^3y^2 + 27xy + 27y. \tag{27}$$

Lösning

För alla stationära punkter gäller att gradienten är noll, dvs.

$$\nabla f = \left(3x^2y^2 + 27y, 2x^3y + 27x + 27\right) = \vec{0} \tag{28}$$

vilket ger oss ekvationerna

$$3x^2y^2 + 27y = 0, \tag{29a}$$
$$2x^3y + 27x + 27 = 0. \tag{29b}$$

Om $y = 0$ ger Ekvation (29b) att

$$27x + 27 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (x,y) = (-1,0). \tag{30}$$

Om $y \neq 0$ kan vi dividera Ekvation (29a) med y, så får vi

$$3x^2y + 27 = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = -\frac{9}{x^2}. \tag{31}$$

Låt oss nu stoppa in detta y-värde i Ekvation (29b) så får vi

$$-2x^3\frac{9}{x^2} + 27x + 27 = -18x + 27x + 27 = 9x + 27 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = -3 \quad \Longrightarrow \quad y = -1. \tag{32}$$

De enda två stationära punkterna är alltså $(-1, 0)$ och $(-3, -1)$.

Men en stationär punkt är inte nödvändigtvis en extrempunkt! För att avgöra om en punkt är en extrempunkt eller en sadelpunkt, kan vi studera den kvadratiska formen

$$Q(h, k) = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 \tag{33}$$

där

$$A = f''_{xx}(a, b), \quad B = f''_{xy}(a, b), \quad C = f''_{yy}(a, b). \tag{34}$$

För vår funktion har vi

$$f''_{xx} = 6xy^2, \quad f''_{xy} = 6x^2y + 27, \quad f''_{yy} = 2x^3. \tag{35}$$

I punkten $(-1, 0)$ får vi alltså

$$A = 0, \quad B = 27, \quad C = -2. \tag{36}$$

Då har vi alltså att $AC - B^2 < 0$ så Q är indefinit. Punkten är alltså en sadelpunkt.

I punkten $(-3, -1)$ får vi däremot

$$A = -18, \quad B = -54 + 27 = -27, \quad C = -54. \tag{37}$$

Nu har vi alltså att $AC - B^2 = 972 - 729 > 0$ och $A < 0$ så Q är negativt definit. Punkten är alltså ett lokalt maximum.

Uppgift 2.70

Funktionen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definieras genom

$$f(x, y, z) = (x + xy + yz)\mathrm{e}^x. \tag{38}$$

Ange alla stationära punkter till f. Har f någon lokal extrempunkt?

Lösning

För alla stationära punkter gäller att gradienten är noll. Låt oss beräkna de partiella derivatorna,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (1 + y)\mathrm{e}^x + (x + xy + yz)\mathrm{e}^x = (1 + x + y + xy + yz)\mathrm{e}^x, \tag{39a}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (x + z)\mathrm{e}^x, \tag{39b}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = y\mathrm{e}^x. \tag{39c}$$

Vi kan snabbt notera att Ekvation (39c) endast är noll då $y = 0$.

Vidare kan vi notera att Ekvation (39b) endast är noll då $z = -x$.

Sist kan vi notera att Ekvation (39a) endast är noll då

$$1 + x + y + xy + yz = 0 \quad \Longrightarrow \quad 1 + x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = -1. \tag{40}$$

Alltså finns det bara en stationär punkt, i $(-1, 0, 1)$.

Är det en extrempunkt eller sadelpunkt? Låt oss studera kvadratiska formen!

$$
\begin{aligned}
f''_{xx} &= (1+y)\mathrm{e}^x + (1+x+y+xy+yz)\mathrm{e}^x = (2+x+2y+xy+yz)\mathrm{e}^x, && \text{(41a)}\\
f''_{xy} &= \mathrm{e}^x + (x+z)\mathrm{e}^x = (1+x+z)\mathrm{e}^x, && \text{(41b)}\\
f''_{xz} &= y\mathrm{e}^x, && \text{(41c)}\\
f''_{yy} &= 0, && \text{(41d)}\\
f''_{yz} &= \mathrm{e}^x, && \text{(41e)}\\
f''_{zz} &= 0. && \text{(41f)}
\end{aligned}
$$

I den stationära punkten vi undersöker är de

$$
\begin{aligned}
f''_{xx} &= \mathrm{e}^{-1}, && \text{(42a)}\\
f''_{xy} &= \mathrm{e}^{-1}, && \text{(42b)}\\
f''_{xz} &= 0, && \text{(42c)}\\
f''_{yy} &= 0, && \text{(42d)}\\
f''_{yz} &= \mathrm{e}^{-1}, && \text{(42e)}\\
f''_{zz} &= 0. && \text{(42f)}
\end{aligned}
$$

Hessianen är då given av

$$
\mathrm{Hess}(f) = \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-1} & \mathrm{e}^{-1} & 0 \\ \mathrm{e}^{-1} & 0 & \mathrm{e}^{-1} \\ 0 & \mathrm{e}^{-1} & 0 \end{bmatrix} \tag{43}
$$

och dess determinanter är då

$$
\begin{aligned}
d_1 &= \det\left(\mathrm{e}^{-1}\right) = \mathrm{e}^{-1}, && \text{(44a)}\\
d_2 &= \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{-1} & \mathrm{e}^{-1} \\ \mathrm{e}^{-1} & 0 \end{vmatrix} = 0 - \left(\mathrm{e}^{-1}\right)^2 = -\mathrm{e}^{-2}, && \text{(44b)}\\
d_3 &= \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{-1} & \mathrm{e}^{-1} & 0 \\ \mathrm{e}^{-1} & 0 & \mathrm{e}^{-1} \\ 0 & \mathrm{e}^{-1} & 0 \end{vmatrix} = -\mathrm{e}^{-1} \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{-1} & 0 \\ \mathrm{e}^{-1} & \mathrm{e}^{-1} \end{vmatrix} = -\mathrm{e}^{-1} \cdot \left(\mathrm{e}^{-2} - 0\right) = -\mathrm{e}^{-3}. && \text{(44c)}
\end{aligned}
$$

Vi har alltså att $d_3 \neq 0$ men varken fall (i) eller fall (ii) i Sylvesters sats är uppfyllda $\implies Q$ är indefinit $\implies$ punkten är ej en extrempunkt.