# Föreläsning # 11

(1) Integration med hjälp av nivåkurvor

**Sats** (se (29), s. 271)

Låt $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vara en $C^1$-funktion av två variabler, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara en $C^0$-funktion av en variabel och $D \subseteq \mathbb{R}^2$ en kompakt, kvadrerbar mängd.

Antag att
$$a \leq g(x,y) \leq b \quad \forall (x,y) \in D.$$

Sätt
$$A(u) := \text{Area}\left(\{(x,y) \in D : g(x,y) \leq u\}\right)$$

Då gäller att
$$\iint_D h(g(x,y))\,dx\,dy = \int_a^b h(u)\,A'(u)\,du$$

**Remark**:

- Notera att satsen förutsätter att integranden har en särskild form, nämligen $h \circ g$, där $h$ är en funktion av <u>en</u> variabel.
- Satsen reducerar dubbelintegralen till en

(förhoppningsvis enklare) enkelintegral, under förutsättning att man kan ta fram en explicit formel för arean $A(u)$. Huruvida man kan göra detta hänger på utseendet av $D$ så $D$ är oftast en geometriskt väldigt "standard" område när man använder satsen.

- Idéen av beviset är som med Fubinis sats att man slice:ar upp den tecknade volymen. Här slice:ar man dock längs nivåkurvor till $g$. Vi avstår från ett formellt bevis men illustrerar idéen i exemplet nedan.

<u>Ex 6.31</u> Beräkna $\iint_D \frac{dx\,dy}{(1+(x+2y)^2)^2}$,

där $D = \{(x,y) \mid x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq x+2y \leq 2\}$

<u>Lösning</u> Sätt

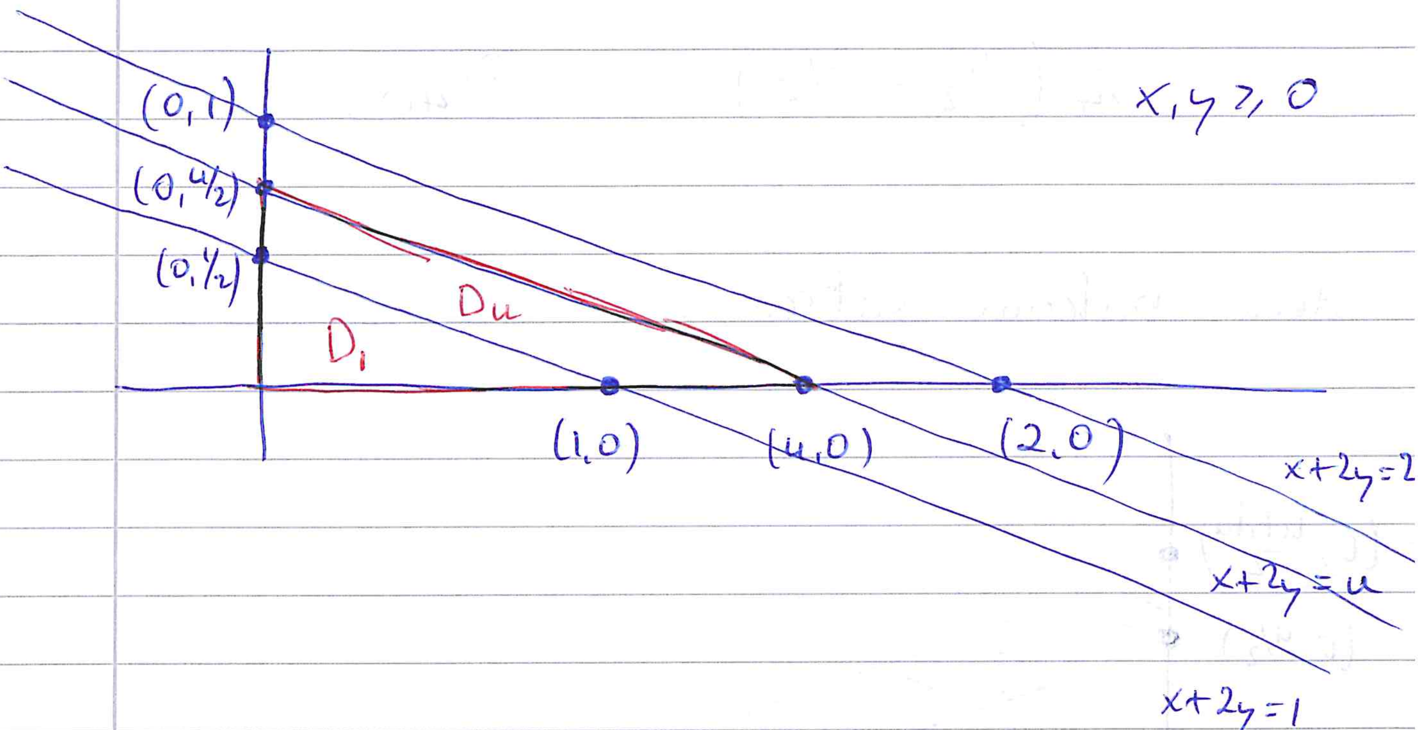
$$g(x,y) = x+2y$$
$$a = 1, \quad b = 2$$
$$h(u) = \frac{1}{(1+u^2)^2}$$

Då har integralen formen $\iint_D h(g(x,y))\,dx\,dy$

$$\overset{(29)}{\Longrightarrow} = \int_1^2 h(u)\,A'(u)\,du,$$

där $A(u) = \text{Area}(D_u)$, och

$D_u = \{(x,y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ 1 \leq x+2y \leq u\}$




Sätt $D_u^* := D_1 \cup D_u$

$$\Rightarrow \underbrace{\text{Area}(D_u^*)}_{\substack{\text{enklare att beräkna} \\ \text{än för } D_u \text{ direkt,} \\ \text{ty } D_u^* \text{ är en} \\ \text{rätvinklig triangel} \\ = \frac{1}{2} u (u/2)}} = \underbrace{\text{Area}(D_1)}_{\substack{\text{en konstant,} \\ \text{dvs oberoende} \\ \text{av } u}} + \underbrace{\text{Area}(D_u)}_{\substack{A(u), \text{ per} \\ \text{def.}}}$$

$$\Rightarrow A(u) = u^2/4 - \text{konstant} \Rightarrow A'(u) = \frac{u}{2}$$

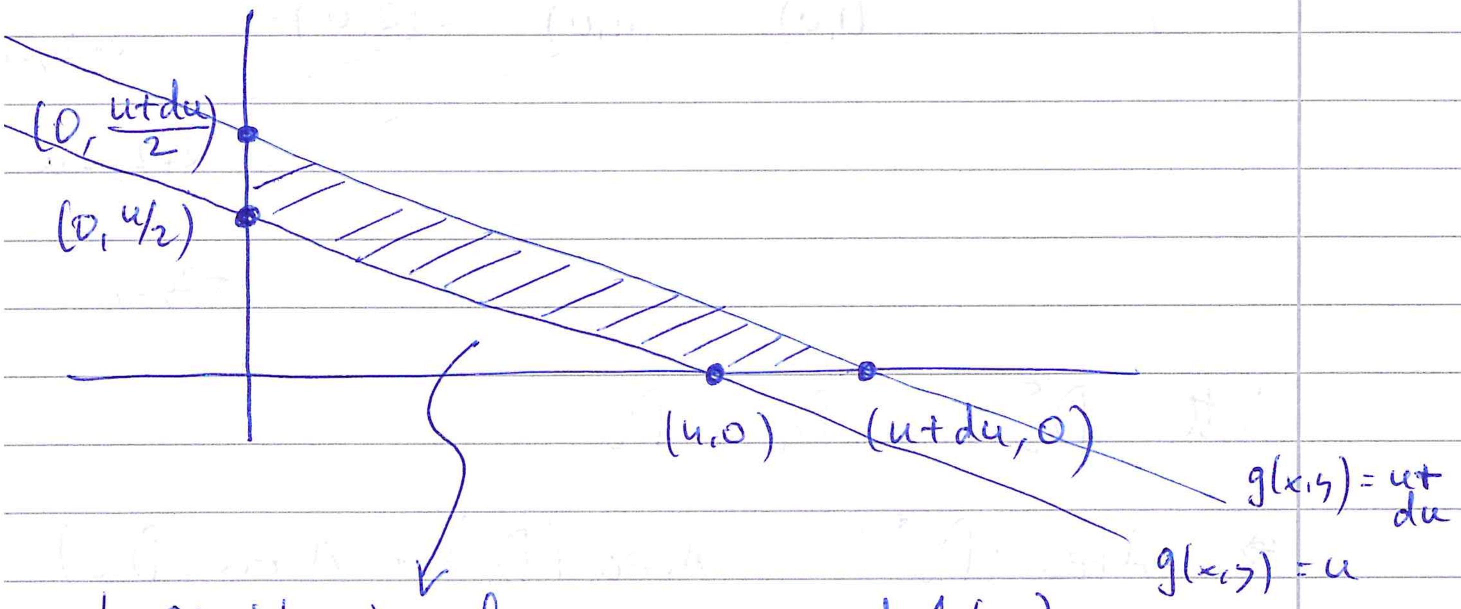
$\longrightarrow$

Integralen blir således:

$$\int_1^2 \frac{u/2}{(1+u^2)^2}\,du \overset{v=1+u^2}{=} 1/4 \int_2^5 \frac{dv}{v^2}$$

$$= 1/4\,(1/2 - 1/5) = 3/40.$$

Idéen bakom satsen:




Infinitesimal area $= dA(u)$
$= A'(u)\,du$

Höjden $h(g(x,y))$ är "konstant" ovanför $g(x,y) = u$

$\Rightarrow$ Infinitesimal volym $= h(u) * A'(u)\,du$

$\Rightarrow$ Integralen blir $\int_a^b h(u)\,A'(u)\,du$ VSV.

# Generaliserade Dubbelintegraler

Precis som i envariabelanalys kan man i flervariabelanalys stöta på dubbelintegraler $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$,

där antingen

(i) D är ett begränsat område men f är obegränsat på D

(ii) D är ett obegränsat område.

Först och främst är frågan då huruvida dubbelintegralen existerar (som en tecknad volym). Formellt handlar det om huruvida ett visst gränsvärde existerar:

(i) Här klipper man bort mindre och mindre delar av D runt punkterna där $f \to \pm\infty$ och integrerar som vanligt över resten av D. Om dessa integraler går mot ett gränsvärde så sägs detta vara värdet av $\iint_D f\,dx\,dy$.

(ii) Här integrerar man över större och större ~~[illegible]~~ delar av D, som vanligt. Om dessa integraler går mot

begränsade

ett entydigt gränsvärde (dvs samma gränsvärde oavsett hur vi täcker D med en växande följd av ~~ändlig~~ begränsade delområden), så sägs detta vara värdet av $\iint_D f\,dx\,dy$

<u>OBS!</u> $+\infty$ och $-\infty$ är möjliga "värden" på en generaliserad integral, precis som i envariabelanalys.

I praktik så tillämpar man de vanliga teknikerna (t.ex. A, B, C, D) på dubbelintegralen och "ser vad man får".

Oftast hamnar man till slut i en situation där man ska tillämpa en av följande två resultat från envariabelanalysen:

<u>Fall (i)</u>

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{1} x^t\,dx = \begin{cases} +\infty, & \text{då } t \le -1 \\ \text{ändlig}, & \text{annars} \end{cases}$$

Ett annat sätt att skriva detta är (*)

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{0}^{\varepsilon} x^t\,dx = \begin{cases} +\infty, & t \le -1 \\ 0, & t > -1 \end{cases}$$

Fall (ii)

(**) $\lim_{N \to \infty} \int_1^N x^t \, dx = \begin{cases} +\infty, & t \geq -1 \\ \text{ändlig}, \; = -\dfrac{1}{t+1}, & t < -1. \end{cases}$

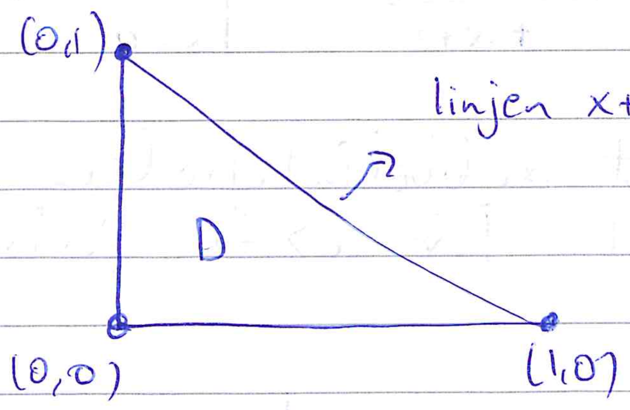
Ex. 6.39 ( fall (i))

Visa att den generaliserade integralen

$$\iint_D (1-x-y)^\alpha \, dx \, dy$$

konvergerar om och endast om $\alpha > -1$, där $D$ är triangeln med hörn i $(0,0)$, $(0,1)$ och $(1,0)$.

OBS! "Konvergerar" betyder att integralens värde är ändligt.




linjen $x+y=1$ : Om $\alpha < 0$ så kommer integranden $f(x,y) = (1-x-y)^\alpha$ att gå mot $\infty$ då $(x,y) \to$ linjen $x+y=1$

Så det är redan uppenbart att integralen konvergerar för $\alpha \geq 0$ ; vi är intresserade av vad som händer för $\alpha < 0$.

<u>Lösning</u> Om detta var en vanlig dubbelintegral skulle vi köra Fubinis Sats, så vi gör detta även här och "ser vad vi får".

Integranden + området D är båda symmetriska m.a.p. $x \leftrightarrow y$ så det spelar ingen roll vilken ordning vi väljer för Fubini.

$$\int_0^1 dy \underbrace{\int_0^{1-y} \cancel{\frac{dx}{(1-y-x)^{\alpha}}} (1-y-x)^{\alpha}\, dx}_{}$$

$(*) \Rightarrow +\infty$, då $\alpha \leq -1$

Annars: $-\dfrac{(1-y-x)^{+\alpha+1}}{+\alpha+1}\Bigg|_{x=0}^{x=1-y} = \dfrac{(1-y)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$

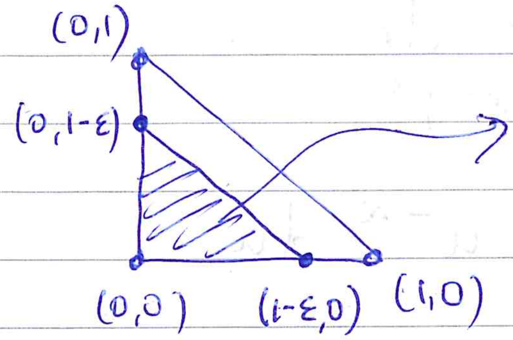
Så vi vet redan att dubbelintegralen divergerar då $\alpha \leq -1$. För $\alpha > -1$, fortsätter vi med

$$\int_0^1 \frac{(1-y)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\, dy = \dots = \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}.$$

<u>OBS!</u> Formellt, det vi har visat är att

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{D_\varepsilon} (1-x-y)^\alpha \, dx\,dy = \begin{cases} +\infty, & \text{då } \alpha \leq -1 \\ \dfrac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}, & \text{då } \alpha > -1 \end{cases}$$

där




området $D_\varepsilon$

$D_\varepsilon \to D$ då $\varepsilon \to 0$.

## <u>Ex. 6.36</u> (Fall (ii))

För vilka reella tal konvergerar

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^\alpha} \; ?$$

<u>Lösning</u> Man kan skriva integralen som

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^\alpha}$$

och prova Fubini. Dock är det mer naturligt att först byta till polära koordinater, i vilket fall gränserna blir: $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{r\,dr\,d\theta}{(1+r^2)^\alpha}$$

$$= 2\pi \int_0^{\infty} \frac{r\,dr}{(1+r^2)^\alpha}$$

$$\overset{u=1+r^2}{=} \frac{2\pi}{2} \underbrace{\int_1^{\infty} u^{-\alpha}\,du}$$

$(**) \Rightarrow +\infty$, då $\alpha \leq 1$

Annars: $\frac{1}{\alpha - 1}$

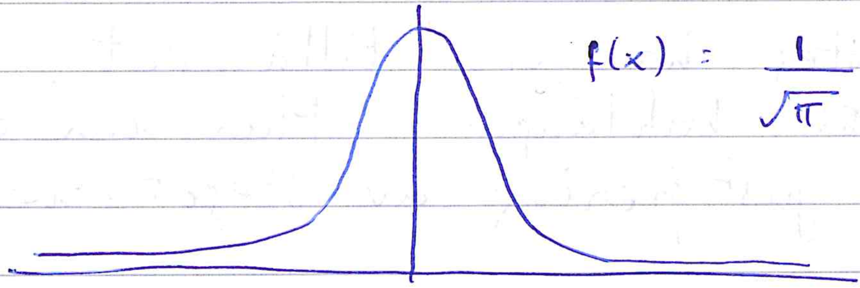
Svar Integralen konvergerar om och endast om $\alpha > 1$ och dess värde är då $\pi/(\alpha-1)$.

Exempel (se Exempel 21, s. 277)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

Detta är en formel av Gauss. Den ger t.ex. den korrekta normaliseringskonstanten för normaldistributionen (också kallad Gaussiska distributionen)

Standard normaldistribution $N(0,1)$ har medelvärde $0$ och varians $1$



$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

behövs ty $f(x)$ är en "sannolikhetsfördelning".

Bevis: För att bevisa formeln måste vi göra något utöver-det-vanliga smart, ty $e^{-x^2}$ är ett känt exempel på en funktion för vilken man kan ej skriva ner en "explicit" antiderivata.

Trick: Sätt $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$

$$\Rightarrow I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy$$ (vi har bara bytt bokstav)

⟶

$$\Rightarrow \quad I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cdot e^{-y^2} \, dx \, dy$$

I detta steg har vi "tillämpat Fubinis Sats baklänges". Man kan ge en rigorös justifiering av steget, men vi avstår.

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \, dx \, dy$$

Byt nu till polära koordinater

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2} r \, dr \, d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr$$

$$\overset{u=r^2}{=} \frac{2\pi}{2} \int_0^{\infty} e^{-u} du = \pi \cdot 1 = \pi$$

Så $I^2 = \pi \Rightarrow I = \sqrt{\pi}$ v.s.v.