Föreläsning #12

Teorin för dubbelintegraler över axelparallella rektangler.

Def Låt $a \leq b$ vara reella tal. En partition av intervallet $[a, b]$ är en ändlig följd

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

Således "partitioneras" intervallet i n st delintervaller $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \dots, n-1$. Dessa är inte helt disjunkta, de överlappar i gemensamma ändpunkter. Men överlappningarna har total längd noll.

Givet $a \leq b$, $c \leq d$ och partitioner

$$(*) \quad \begin{aligned} a &= x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \\ c &= y_0 < y_1 < \dots < y_m = d \end{aligned}$$

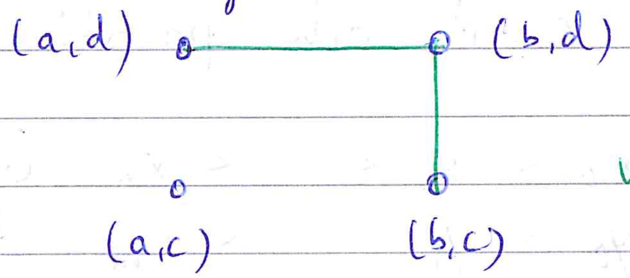
så får vi en partition av den axelparallella rektangeln $\Delta : [a, b] \times [c, d]$ in i mn st delrektangler $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$, $i = 0, \dots, n-1$; $j = 0, \dots, m-1$.

(†) Delrektanglerna överlappar i gemensamma kanter, vilka har sammanlagt noll area.

Def Låt $\Delta = [a, b] \times [c, d]$ vara en axelparallell rektangel och $\Phi : \Delta \to \mathbb{R}$ en funktion. Φ sägs vara en <u>trappfunktion</u> om det finns partitioner

(*) sådan att Φ har ett konstant värde på varje delrektangel $[x_i, x_{i+1}) \times [y_j, y_{j+1})$.

<u>OBS!</u> I definitionen måste vi ha helt disjunkta delrektangler för att villkoret att Φ ska ha ett konstant värde på varje ska kunna uppfyllas i allmänhet. Därför de halvöppna rektanglerna i definitionen. I synnerhet spelar det ingen roll vilka värden Φ antar på Δ's övre och högra kant



Φ kan anta vilka värden som helst här.

Men dessa har ingen area, vilket är det viktiga inför nästa definition.

<u>Def</u> Låt $\Delta = [a,b] \times [c,d]$ vara en axelparallell rektangel och $\Phi : \Delta \to \mathbb{R}$ vara en trappfunktion, med avseende på givna partitioner av formen (*). Låt c_{ij} vara det konstanta värdet som Φ antar på $[x_i, x_{i+1}) \times [y_j, y_{j+1})$, $i = 0, \ldots, n-1$; $j = 0, \ldots, m-1$. Då definieras <u>dubbelintegralen av Φ över Δ</u>

enligt

$$\iint_{\Delta} \Phi(x,y)\,dx\,dy \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} c_{ij}(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j)$$

Dubbelintegralen av en trappfunktion är alltså, <u>per definition</u>, en ändlig summa av tecknade volymer av rätblock.

OBS! Givet en trappfunktion Φ så finns det oändligt många olika sätt att välja ~~en~~ partitionerna (*) s.a. Φ är konstant på varje rektangel $[x_i, x_{i+1}) \times [y_j, y_{j+1})$. I synnerhet kan man göra partitionerna godtyckligt "<u>fina</u>", dvs se till att areorna på alla delrektanglar går mot noll.

MEN: Pga ($\uparrow$) är det lätt att inse att värdet på summan i definitionen av dubbelintegralen är oberoende av valet av partitionerna. M.a.o. dubbelintegralen av en trappfunktion över en axelparallell rektangel är (ett) <u>väldefinierat</u> (reellt tal)

Def (s. 233)

Låt $\Delta = [a,b] \times [c,d]$ vara en axelparallell rektangel och $f : \Delta \to \mathbb{R}$ vara en begränsad funktion. f sägs vara <u>integrerbar</u> över Δ om det för varje $\varepsilon > 0$ finns trappfunktioner Φ, Ψ på Δ s.a.

(i) $\Phi \leq f \leq \Psi$, dvs $\Phi(x,y) \leq f(x,y) \leq \Psi(x,y) \quad \forall (x,y) \in \Delta$

(ii) $\iint_\Delta \Psi \, dx\,dy - \iint_\Delta \Phi \, dx\,dy < \varepsilon$.

I så fall definieras <u>dubbelintegralen</u> av f över Δ enligt

$$\iint_\Delta f \, dx\,dy \overset{\text{def}}{=} \sup_{\substack{\Phi \leq f \\ \Phi \text{ trapp.}}} \iint_\Delta \Phi \, dx\,dy$$

$$\overset{\text{def}}{=} \inf_{\substack{\Psi \geq f \\ \Psi \text{ trapp.}}} \iint_\Delta \Psi \, dx\,dy$$

<u>Informellt</u>: En funktion är integrerbar om den kan "klämmas in" godtyckligt väl mellan trappfunktioner och dess integral

är det klämda gränsvärdet av trappfunktionernas integraler.

Huvudsats (se Satser 6.1.2, 6.1.3)

Låt $\Delta = [a,b] \times [c,d]$ vara en axelparallell rektangel, och $f : \Delta \to \mathbb{R}$ en kontinuerlig funktion. Då gäller

(i) f är integrerbar över Δ

(ii) Båda de itererade enkelintegralerna

$$\int_c^d dy \left(\int_a^b f(x,y)\, dx \right) \quad \text{och} \quad \int_a^b dx \left(\int_c^d f(x,y)\, dy \right)$$

existerar.

(iii) (Fubinis Sats):

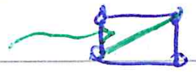
$$\iint_\Delta f(x,y)\, dx\, dy = \int_c^d dy \left(\int_a^b f(x,y)\, dx \right) = \int_a^b dx \left(\int_c^d f(x,y)\, dy \right)$$

Bevis av (i)

Låt $\varepsilon > 0$ vara givet. Vi måste hitta trappfunktioner Φ, Ψ s.a. $\Phi \leq f \leq \Psi$ punktvis på Δ och $\iint_\Delta \Psi \, dxdy - \iint_\Delta \Phi \, dxdy < \varepsilon.$

Eftersom f är kontinuerlig och Δ är en kompakt mängd så är (enligt en sats från första analys kursen) f likformigt kontinuerlig på Δ. Därför finns ett $\delta > 0$ s.a. för alla $\mathbb{x}_1 = (x_1, y_1)$ och $\mathbb{x}_2 = (x_2, y_2)$ i Δ gäller:

$$\|\mathbb{x}_1 - \mathbb{x}_2\| < \delta \Rightarrow |f(\mathbb{x}_1) - f(\mathbb{x}_2)| < \frac{\varepsilon}{\text{Area}(\Delta)}$$

Välj nu partitioner av formen (*) s.a. diametern (dvs ) på varje delrektangel $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ är mindre än δ.

Eftersom f är kontinuerlig så antar f både ett största och minsta värde på varje sluten delrektangel $R_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$.
Sätt

$$C_{ij} = \max_{(x,y) \in R_{ij}} f(x,y)$$

$$c_{ij} = \min_{(x,y) \in R_{ij}} f(x,y)$$

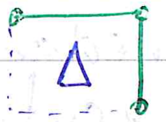
(1)

Valet av partitionerna $\Rightarrow$ $\boxed{C_{ij} - c_{ij} < \frac{\varepsilon}{\text{Area}(\Delta)} \quad \forall i,j}$

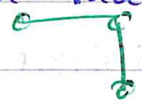
Definiera nu trappfunktionerna Φ, Ψ enligt

$$\Psi(x,y) = C_{ij} \quad \text{på} \quad [x_i, x_{i+1}) \times [y_j, y_{j+1})$$
$$\Phi(x,y) = c_{ij} \quad \text{på} \quad [x_i, x_{i+1}) \times [y_j, y_{j+1})$$

$$\left.\begin{array}{l} \Psi(x,y) = M \\ \Phi(x,y) = m \end{array}\right\} \text{ på}$$



där m, resp. M är det minsta (resp. största) värdet av f på den kompakta mängden



Per konstruktion är det uppenbart att $\Phi(x,y) \leq f(x,y) \leq \Psi(x,y) \ \forall (x,y) \in \Delta$

Sedan har vi att

$$\iint_\Delta \Psi \, dx\,dy - \iint_\Delta \Phi \, dx\,dy$$

$=$ (per def. av integral av trappfunktion)

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} (C_{ij} - c_{ij})(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)$$

$$\overset{(1)}{<} \frac{\varepsilon}{\text{Area}(\Delta)} \sum_{i,j} (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)$$

$$= \frac{\varepsilon}{\text{Area}(\Delta)} \cdot \text{Area}(\Delta) = \varepsilon \qquad \text{V.S.V.}$$

Bevis av (ii)

Vi ska bevisa att $\int_c^d dy \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right)$ existerar. Idéen är densamma för den andra itererade integralen.

~~Kgt~~ Vi vet redan från envariabelanalys att en kontinuerlig funktion av <u>en</u> variabel är integrerbar, dvs om $g(x)$ är kontinuerlig och $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ så <u>existerar</u> talet $\int_\alpha^\beta g(x)\,dx$.

(dvs kan definieras rigoröst som ett entydigt gränsvärde av lämpliga Riemannsummor)

M.a.o. en kontinuerlig funktion av en variabel är <u>integrerbar</u> över en sluten intervall då vi definierar integrerbarhet i termer av trappfunktioner på samma sätt som vi gjort här (fast ännu enklare i en variabel, trappfktrs integralen blir ändliga summor av tecknade areor)

Eftersom $f(x,y)$ är en kontinuerlig funktion av 2 variabler så är, för varje fixt y, $f(x,y)$ en kontinuerlig funktion av en variabel x. Därför existerar $\int_a^b f(x,y)\,dx$, för varje fixt y. Dess värde är en funktion $A(y)$ av y, för $c \le y \le d$.

Om vi kan bevisa att $A(y)$ är i sin tur en kontinuerlig funktion av y, då kan vi åberopa envariabelanalysen igen och härleda att $\int_c^d A(y)\,dy$ = $\int_c^d dy\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)$ existerar, v.s.v.

Så det återstår att visa att $A(y)$ är en kontinuerlig funktion av y, för $c \le y \le d$. Notera att det skulle följa att $A(y)$ är likformigt kontinuerlig ty $[c,d]$ är en kompakt mängd. Vi ska visa likformig kontinuitet direkt.

Så låt $\varepsilon > 0$ vara givet. Vi måste bevisa existens av $\delta > 0$ s.a.

$$c \le y_1 \le y_2 \le d \;\&\; y_2 - y_1 < \delta \Rightarrow |A(y_2) - A(y_1)| < \varepsilon$$

För godtyckliga $y_1, y_2 \in [c,d]$ gäller

$$|A(y_2) - A(y_1)| = \left|\int_a^b \left(f(x,y_2) - f(x,y_1)\right) dx\right|$$

$\longrightarrow$

$$\leq (b-a)\cdot M, \quad \text{där}$$

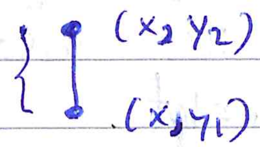
$$M := \max_{a \leq x \leq b} |f(x, y_2) - f(x, y_1)|$$

(Notera att detta maximum existerar, ty f är kontinuerlig).

f är likformigt kontinuerlig på Δ så det finns ett $\delta > 0$ s.a.

$$\|x_1 - x_2\| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Antag nu att $|y_2 - y_1| < \delta$, för samma δ.
Då gäller för varje $x \in [a, b]$ att
$\|(x, y_2) - (x, y_1)\| < \delta$



avstånd $= y_2 - y_1$

Så för denna δ gäller $M < \frac{\varepsilon}{b-a}$,

vilket medför att $|A(y_2) - A(y_1)| < \varepsilon$, v.s.v.

Bevis av (iii)

OBS! (iii) är en egen sats, Sats 6.1.2 i boken, eftersom vilken som helst funktion f (ej nödvändigtvis kontinuerlig) som uppfyller (i) och (ii) också uppfyller (iii). Det är det vi ska bevisa härnäst:

Så vi antar att f är integrerbar över den axelparallella rektangeln $\Delta = [a,b] \times [c,d]$ och att båda (itererade) enkelintegralerna

$$\int_c^d dy \left(\int_a^b f(x,y)\, dx \right) \text{ och } \int_a^b dx \left(\int_c^d f(x,y)\, dy \right)$$

existerar. Vi ska härleda att

$$\iint_\Delta f(x,y)\, dx\, dy = \int_c^d dy \left(\int_a^b f(x,y)\, dx \right) = \int_a^b dx \left(\int_c^d f(x,y)\, dy \right)$$

Jag ska bevisa den första likheten, idéen är densamma för den andra.

Det räcker att bevisa att, om Φ, Ψ är trappfunktioner med $\Phi \le f \le \Psi$ så gäller

(2) ... $$\iint_\Delta \Phi(x,y)\, dx\, dy \le \int_c^d dy \left(\int_a^b f(x,y)\, dx \right) \le \iint_\Delta \Psi(x,y)\, dx\, dy$$

Betrakta den vänstra olikheten (idéen är densamma för den högre). Eftersom $\Phi \le f$ punktvis är det åtminstone uppenbart att

$$\int_c^d dy \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) \ge \int_c^d dy \left(\int_a^b \Phi(x,y)\,dx \right)$$

MEN: Det är också uppenbart att en trappfunktion Φ på $[a,b] \times [c,d]$ uppfyller

$$\iint_\Delta \Phi(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \left(\int_a^b \Phi(x,y)\,dx \right), \quad \ldots (3)$$

varav följer den vänstra olikheten i (2) $\boxed{//}$

OBS! (3) är en direkt konsekvens av hur dubbelintegralen av en trappfunktion definierades. Det blir ordbajs att skriva ner, här är ett otvetydigt exempel där det är o.k. i ett bevis att skriva de heliga orden "Det är $\left\{ \begin{array}{l} \text{klart att} \ldots \text{"} \\ \text{uppenbart} \end{array} \right.$