

Demonstration 3

MVE035/MVE600 - Flervariabelanalys

Hampus Renberg Nilsson, MSc.

Hampus.Renberg.Nilsson@chalmers.se

Våren 2021

Dagens genomgång: 3.9d, 3.28, 3.33, 6.16, 6.21

Uppgift 3.9d

Bestäm funktionalmatrisen till följande avbildningar:

$$\text{d)} \quad \begin{cases} y_1 = x_1^2 - x_2^2, \\ y_2 = 2x_1x_2 \end{cases} \quad (1)$$

Lösning

Funktionalmatrisen av $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ ges av

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 & -2x_2 \\ 2x_2 & 2x_1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Uppgift 3.28

a) Visa att ytan $e^{z-1} + zy + x - 2y^3 = 0$ går genom punkten $P : (0, 1, 1)$ och bestäm en ekvation för tangentplanet i punkten.

b) Avgör om ytan kan framställas på formen $z = f(x, y)$ i en omgivning av punkten P .

Lösning a)

Sätt

$$f(x, y, z) = e^{z-1} + zy + x - 2y^3. \quad (3)$$

Eftersom

$$f(0, 1, 1) = e^{1-1} + 1 \cdot 1 + 0 - 2 \cdot 1^3 = 1 + 1 + 0 - 2 = 0 \quad (4)$$

ligger P på nivåytan $f(x, y, z) = 0$. För att finna tangentplanet normal beräknar vi

$$\nabla f = (1, z - 6y^2, y + e^{z-1}) \quad (5)$$

vilket i P är

$$\nabla f(0, 1, 1) = (1, 1 - 6, 1 + 1) = (1, -5, 2). \quad (6)$$

Då är tangentplanets ekvation

$$1(x - 0) - 5(y - 1) + 2(z - 1) = 0 \implies x - 5y + 2z + 3 = 0. \quad (7)$$

Lösning b)

Eftersom

$$\frac{\partial f}{\partial z}(0, 1, 1) = 2 \neq 0 \quad (8)$$

så följer av implicita funktionssatsen att $f(x, y, z) = 0$ nära P definierar z som en funktion av x och y .

Uppgift 3.33

Visa att ytorna $x^2 - y^2 - z^2 = -1$ och $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ i en omgivning av $(1, 1, 1)$ skär varandra längs en kurva. Bestäm ekvationen för tangenten i $(1, 1, 1)$ till kurvan.

Lösning

Sätt

$$\begin{cases} f(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2 + 1, \\ g(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 6. \end{cases} \quad (9)$$

Om antingen $\frac{d(f, g)}{d(x, y)} \neq 0$, $\frac{d(f, g)}{d(y, z)} \neq 0$ eller $\frac{d(f, g)}{d(z, x)} \neq 0$ då $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ så kan vi lokalt parametrisera skärningskurvan given av

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0, \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

med z, x eller y som parameter. Låt oss undersöka en av dem,

$$\frac{d(f, g)}{d(y, z)} = \begin{vmatrix} -2y & -2z \\ 4y & 6z \end{vmatrix} = -2y \cdot 6z - (-2z) \cdot 4y = 8yz - 12yz = -4yz. \quad (11)$$

I punkten $(1, 1, 1)$ har vi alltså att

$$\left. \frac{d(f, g)}{d(y, z)} \right|_{(1, 1, 1)} = -4 \neq 0, \quad (12)$$

vilket innebär att kurvan kan framställas med x som parameter. Vi kan alltså sätta

$$\begin{cases} x = t, \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases} \quad (13)$$

Då kan vi skriva våra funktioner som

$$\begin{cases} f(t) = t^2 - y^2(t) - z^2(t) + 1, \\ g(t) = t^2 + 2y^2(t) + 3z^2(t) - 6. \end{cases} \quad (14)$$

Tangentens riktning ges av $(x'(1), y'(1), z'(1)) = (1, y'(1), z'(1))$. Vi söker alltså $y'(1), z'(1)$. Genom implicit derivering fås att

$$\begin{cases} f'(t) = 2t - 2y(t)y'(t) - 2z(t)z'(t), \\ g'(t) = 2t + 4y(t)y'(t) + 6z(t)z'(t). \end{cases} \quad (15)$$

Låt oss nu använda att $(x, y, z) = (t, y(t), z(t)) = (1, 1, 1)$ i punkten, samt att $(f'(t), g'(t)) = (0, 0)$ vilket vi vet från villkoret i Ekvation (10). Då får vi ekvationerna

$$\begin{aligned} 2 - 2y'(1) - 2z'(1) &= 0, & \boxed{2} \\ 2 + 4y'(1) + 6z'(1) &= 0. & \Downarrow \end{aligned} \quad (16)$$

Vi adderar den första gånger 2 till den andra och får

$$6 + 2z'(1) = 0 \quad \implies \quad z'(1) = -3. \quad (17)$$

Sedan kan vi använda detta i den första ekvationen, så får vi

$$2 - 2y'(1) - 2 \cdot (-3) = 2 - 2y'(1) + 6 = 0 \quad \implies \quad y'(1) = 4. \quad (18)$$

Alltså kan tangenten beskrivas med ekvationen

$$(x, y, z) = (1, 1, 1) + t(1, 4, -3). \quad (19)$$

Uppgift 6.16

Beräkna

$$\iint_D \frac{xy \, dx \, dy}{(1 + y^2)^2} \quad (20)$$

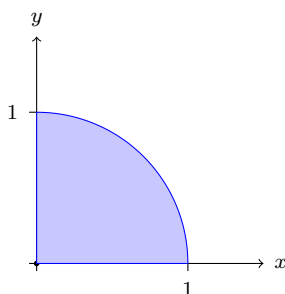
där $D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Lösning

Hur ser området ut?

$$\begin{aligned} x \geq 0, y \geq 0 &\implies \text{Första kvadranten.} \\ x^2 + y^2 \leq 1 &\implies \text{Området innanför enhetscirkeln.} \end{aligned} \quad (21)$$

Låt oss skissa!



Hur sätter vi gränserna för integralerna?

Vi kan ej låta både x och y gå från 0 till 1, ty då får vi ett för stort område (en 1×1 -kvadrat).

Vi skulle kunna övergå till polära koordinater, men här funkar det utmärkt att uttrycka y -gränserna som en funktion av x .

Längs kurvan har vi att $y = \sqrt{1-x^2}$. Vi kan alltså låta x gå från 0 till 1 och y från 0 till $\sqrt{1-x^2}$. Då får vi att integralen ges av

$$I = \iint_D \frac{xy \, dx \, dy}{(1+y^2)^2} = \int_0^1 x \underbrace{\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{y \, dy}{(1+y^2)^2} \right)}_{\clubsuit} \, dx. \quad (22)$$

Vi beräknar delintegralen $\clubsuit$ separat (för att spara plats). Notera att den är mycket lik

$$\frac{d}{dy} \frac{1}{1+y^2} = -(1+y^2)^{-2} \cdot 2y = \frac{-2y}{(1+y^2)^2} \quad (23)$$

så vi slänger in lämpliga konstanter och får

$$\clubsuit = -\frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{-2y \, dy}{(1+y^2)^2} = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{1+y^2} \right]_0^{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2-x^2} - 1 \right). \quad (24)$$

Låt oss nu använda detta i I och vi får

$$I = -\frac{1}{2} \int_0^1 x \left(\frac{1}{2-x^2} - 1 \right) \, dx. \quad (25)$$

Denna integral kan vi dela upp i två delintegraler,

$$\int_0^1 \frac{x}{2-x^2} \, dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{-2x}{2-x^2} \, dx = -\frac{1}{2} [\ln(2-x^2)]_0^1 = -\frac{1}{2} (\ln 1 - \ln 2) = \frac{\ln 2}{2} \quad (26)$$

och

$$\int_0^1 x \, dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2}. \quad (27)$$

Den sökta integralen ges alltså av

$$I = -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1 - \ln 2}{4} \quad (28)$$

Uppgift 6.21

Beräkna

$$\iint_D \ln(1+x^2+y^2) \, dx \, dy \quad (29)$$

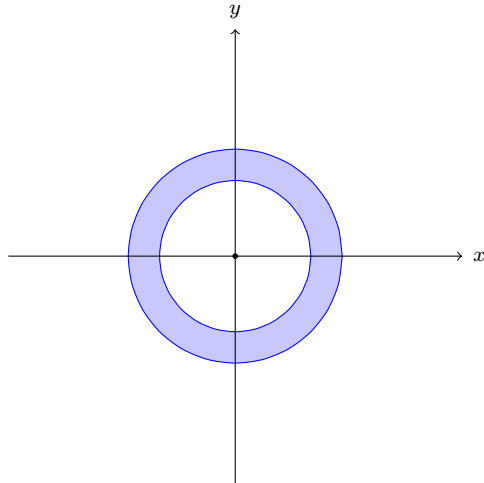
där $D = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$.

Lösning

Hur ser området ut?

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &\geq 1 &\implies &\text{Området utanför enhetscirkeln.} \\x^2 + y^2 &\leq 2 &\implies &\text{Området innanför cirkel med radie } \sqrt{2}.\end{aligned}\tag{30}$$

Låt oss skissa!



Hur sätter vi gränserna för integralerna?

Vi skulle kunna uttrycka gränserna i x och y genom att beräkna två integraler, men det blir jobbigt.

Här passar det däremot utmärkt med polära koordinater!

I polära koordinater $\{(r, \theta) : x = r \cos \theta, y = r \sin \theta\}$ ges området enkelt av att låta r gå från 1 till $\sqrt{2}$ och θ från 0 till 2π . Då får vi att integralen ges av

$$I = \iint_D \ln(1 + x^2 + y^2) \, dx \, dy = \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \ln(1 + r^2) \, r \, d\theta \, dr = 2\pi \int_1^{\sqrt{2}} \ln(1 + r^2) \, r \, dr. \tag{31}$$

Notera den extra faktorn r som kommer från att $dx \, dy = r \, d\theta \, dr$!

Vi kan nu använda variabelsubstitutionen

$$\begin{aligned}t &= 1 + r^2, \\dt &= 2r \, dr, \\r = 1 &\implies t = 2, \\r = \sqrt{2} &\implies t = 3.\end{aligned}\tag{32}$$

Då får vi att

$$I = \pi \int_2^3 \ln t \, dt = \pi \underbrace{[t \ln t - t]_2^3}_{\spadesuit}.\tag{33}$$

Vi beräknar $\spadesuit$ separat,

$$\spadesuit = (3 \ln 3 - 3) - (2 \ln 2 - 2) = \ln 27 - \ln 4 - 1 = \ln \frac{27}{4} - 1,\tag{34}$$

och alltså har vi att

$$I = \pi \left(\ln \frac{27}{4} - 1 \right).\tag{35}$$