Föreläsning #13

DEL 1 TEORIN FÖR DUBBELINTEGRALER ÖVER S.K. KVADRERBARA OMRÅDEN.

Def 1 Låt $D_1 \subseteq D_2$ vara delmängder i $\mathbb{R}^n$ och $f : D_1 \to \mathbb{R}$ en funktion. Nollutvidgningen av f till D_2 är funktionen $f_{D_2} : D_2 \to \mathbb{R}$ givet av

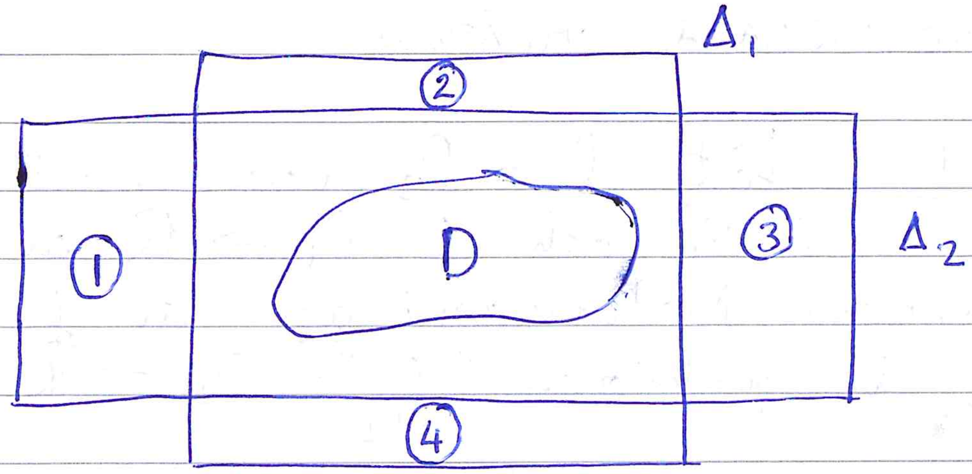
$$f_{D_2}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{om } x \in D_1 \\ 0, & \text{om } x \in D_2 \setminus D_1. \end{cases}$$

Def 2 Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara en begränsad mängd och $f : D \to \mathbb{R}$ en funktion. f sägs vara integrerbar över D om det finns någon axelparallell rektangel $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$ s.a.
(i) $D \subseteq \Delta$ (ii) f_Δ är integrerbar över Δ.

Då definieras dubbelintegralen av f över D enligt

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \overset{\text{def}}{=} \iint_\Delta f_\Delta(x,y)\,dx\,dy.$$

OBS! Def. 2 make:ar sense ty om Δ_1, Δ_2 är två axelparallella rektangler som både innehåller D då har vi följande bild:



Så $\Delta_1 \cap \Delta_2$ är också en axelparallell rektangel som innehåller D.

$f_{\Delta_1} \equiv 0$ i de återstående regionerna 2, 4

$f_{\Delta_2} \equiv 0$ i de återstående regionerna 1, 3

$\Rightarrow$ (i) f_{Δ_1} integrerbar över Δ_1

$\Updownarrow$

f_{Δ_2} integrerbar över Δ_2

$\Updownarrow$

$f_{\Delta_1 \cap \Delta_2}$ integrerbar över $\Delta_1 \cap \Delta_2$

och (ii) $\displaystyle\iint_{\Delta_1} f_{\Delta_1}\,dx\,dy = \iint_{\Delta_2} f_{\Delta_2}\,dx\,dy$

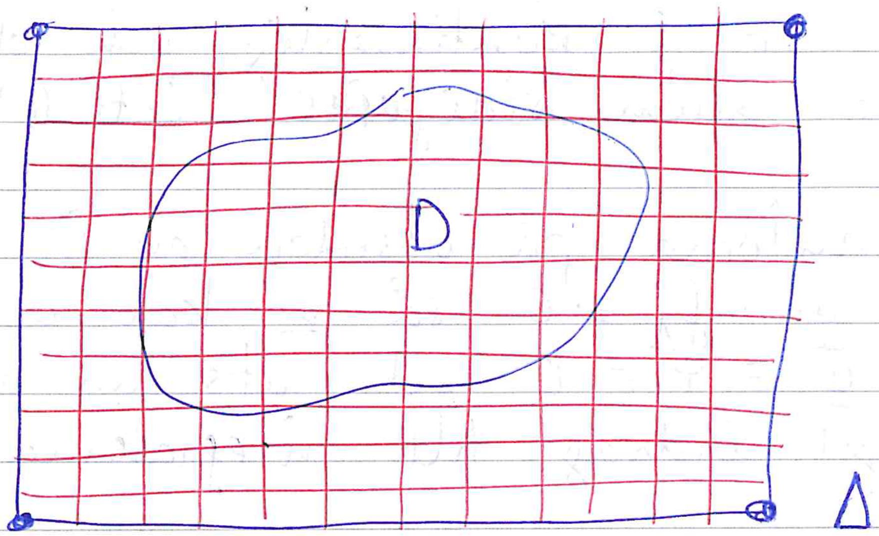
$$= \iint_{\Delta_1 \cap \Delta_2} f_{\Delta_1 \cap \Delta_2}\,dx\,dy$$

Så i Def. 2 spelar det ingen roll vilken Δ

Därför kan man skriva f_D för nollutvidgningen utan att specificera Δ (se Def. 3, s. 241).

vi väljer, dubbelintegralen av f över D har samma värde oavsett (då def existerar).

Betrakta nu en fixt D, Δ och f.



Antag att f är kontinuerlig på D
Vad krävs för att f_Δ ska vara integrerbar över Δ?

Intuitivt (i) f_Δ har discontinuiteter endast på randen ∂D till D

(ii) Enligt def, f_Δ är integrerbar över Δ omm det för varje $\varepsilon > 0$ finns trappfunktioner Φ, Ψ s.a.

(a) $\Phi \leq f_\Delta \leq \Psi$ på hela Δ

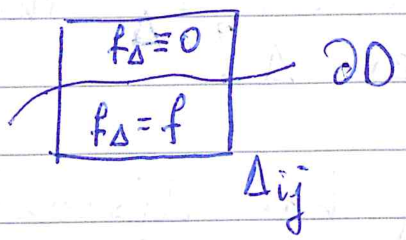
(b) $\iint_\Delta \Psi \, dx\, dy - \iint_\Delta \Phi \, dx\, dy < \varepsilon$.

(iii) Om vi delar upp Δ i mindre rektanglar (se bilden) då har vi inget problem att "klämma in f väl" mellan trappfunktioner båda

- för rutorna på insidan av D. Ty där är f kontinuerlig och det funkar såsom tidigare (Sats 6.1.3)

- för rutorna på utsidan av D. Ty där är $f_\Delta \equiv 0$ så vi kan också sätta $\Phi \equiv \Psi \equiv 0$ och utsidan av D ger inget bidrag till integralerna i (1)

Vi får problem dock för rutorna som korsar randen ∂D.



På en sådan ruta måste $\Phi_{ij} \leq 0$ medans $\Psi_{ij} \geq$ max. värdet av f på insidan av rutan, över vilket vi har ingen kontroll för godtycklig f.

Så $\Psi_{ij} - \Phi_{ij}$ kan ej göras godtyckligt liten för dessa rutor.

⇒ (iv) För att (b) inte ska fallera måste det alltså bli så att, när vi tar finare och finare uppdelningar av Δ, att den sammanlagda arean av de rutor som korsar ∂D går mot noll.

Dessa observationer motiverar följande definitioner:

<u>Def 3</u> En mängd $M \subseteq \mathbb{R}^2$ kallas för en <u>nollmängd</u> om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett ändligt antal axelparallella rektanglar $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ s.a.

(i) $M \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \Delta_i$

(ii) $\sum_{i=1}^{n} \text{Area}(\Delta_i) < \varepsilon$

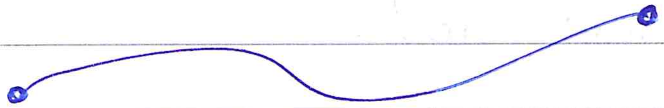
<u>Def 4</u> En mängd $D \subseteq \mathbb{R}^2$ sägs vara <u>kvadrerbar</u> om dess rand ∂D är en nollmängd.

<u>Anm</u>: Kom ihåg den formella definitionen av rand: $(A \subseteq \mathbb{R}^n)$

rand(A) = $\{ p \in \mathbb{R}^n \mid$ varje omgivning av p innehåller punkter både från A och $\mathbb{R}^n \setminus A \}$

<u>Intuitivt</u> : En nollmängd i $\mathbb{R}^2$ är en mängd "utan area".

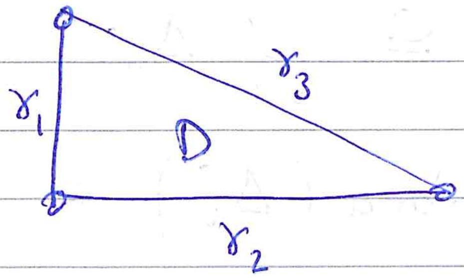
Man kan visa att varje ändlig C^1-kurva



är en nollmängd (C^1-kurvor definieras formellt nästa vecka och de har alltid en väldefinierad <u>längd</u>)

De flesta kompakta områdena man stöter på har en rand som är <u>styckvis C^1</u>

Ex.



$\partial D = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$
Varje γ_i är C^1
(uppenbarligen)

I synnerhet gäller detta alla reguljära områden (per definition av reguljäritet från förra veckan)

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Varje reguljärt område är kvadrerbart}}$

Det finns ytterligare exempel på kvadrerbara områden, t.ex.

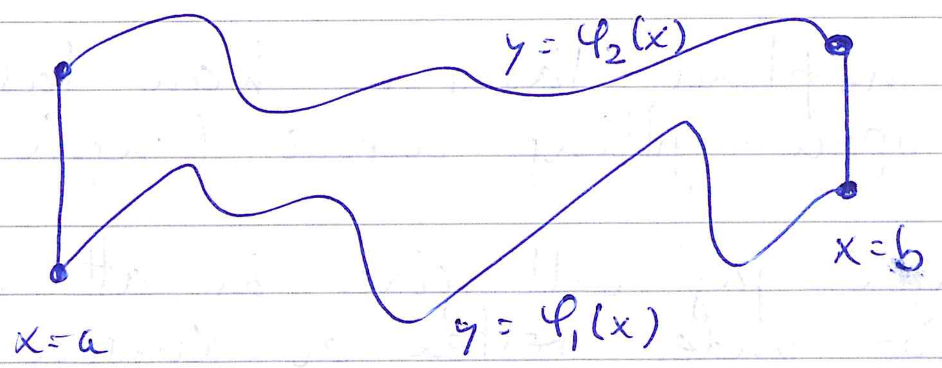
lemma 1, s. 242

Låt $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara en C^0-funktion av en variabel. Då är kurvan

$$C = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ y = \varphi(x)\}$$

en nollmängd.

Poängen är att det räcker att φ är C^0, dvs kontinuerlig, den behöver ej vara C^1.
Så t.ex. ett "super" reguljärt område som ligger mellan två <u>kontinuerliga</u> funktionsgrafer är fortfarande kvadrerbart.



I allmänhet kan det dock hända konstiga saker med kurvor i planet som är C^0 men inte C^1.

En kurva som hör till en funktionsgraf $y = f(x)$ är väldigt speciell i.o.m. att

den "har inga spiraler", dvs man kan ej
ha 2 y-värden från samma x-värde.

Men om man "tillåter spiraler", då finns
det C^0-kurvor med en positiv area!!

Dessa går under rubriken space-filling
curves

Formellt kan man t.ex. bevisa följande
sats:

Sats Det finns en funktion
$$f : [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$$
som är både kontinuerlig och surjektiv.

Den nyfikna läsaren kan läsa vidare
om space-filling curves (ingår ej i kursen)

Poängen jag vill göra är att alla våra
kurvor under resten av kursen kommer att
vara styckvis C^1, och därmed kommer
alla våra (kompakta) områdena att vara
kvadrerbara. Vikten av detta ser vi nu
i följande sats

Sats (se lemma 2, s. 243) Låt D vara
ett kompakt område

i $\mathbb{R}^2$ och $f: D \to \mathbb{R}$ en kontinuerlig funktion. Om D är kvadrerbart, då är f integrerbar över D.

$\boxed{\text{* Så vi kan alltid make:a sense av dubbelintegralen av en kontinuerlig funktion över ett kompakt, kvadrerbart område.}}$

Dagens Punchline.

<u>Bevis</u> Vi avstår från att skriva ut ett formellt bevis men alla de väsentliga idéerna fanns i diskussionen mellan Def. 2 och Def. 3 ovan.

<u>Sista Anmärkning</u>

Ni kanske undrar om det finns ngt bra exempel på en icke-integrerbar funktion (på en kompakt, kvadrerbar mängd)

Ja, men sådana finns redan i envariabel. Kanske det roligaste / enklaste exemplet är följande:

$$f: [0,1] \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \begin{cases} 1, & \text{om } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{om } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Säg att man vill klämma in f mellan två trappfunktioner $\Phi \le f \le \Psi$.

Så man först gör en uppdelning:

$$0 = x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_{n-1} \quad 1 = x_n$$

Varje delintervall kommer att innehålla både rationella och irrationella tal. Ty Φ, Ψ är konstanta på varje delintervall innebär det att

$$\Phi(x) \le 0 \quad \forall\, x \in [0,1]$$
$$\Psi(x) \ge 1 \quad \forall\, x \in [0,1]$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \Phi(x)\,dx \le 0 < 1 \le \int_0^1 \Psi(x)\,dx$$

Så $\int_0^1 \Psi\,dx - \int_0^1 \Phi\,dx$ kan ej bli $< \varepsilon$, då $\varepsilon \le 1$.

<u>OBS!</u> Den "integrationsteori" vi har presenterat i denna kurs är Riemanns integrationsteori. En mer avancerad teori utvecklades av Lebesgue och presenteras i MVs avancerade kurs med det välvalda namnet "Integrationsteori". Bl.a. så är funktionen från det föregående exemplet <u>Lebesgue integrerbar</u>.

DEL 2 TRIPPELINTEGRALER.

Det finns väsentligen inga nya idéer då man utvidgar teorin för dubbelintegraler till högre dimensioner. Man har förstås de vanliga problemen med notation/terminologi och visualisering.

Vi ägnar dock en del tid åt trippelintegraler pga deras fysikaliska relevansen.

Volymberäkningar

Låt $D \subseteq \mathbb{R}^3$ vara ett kompakt och kvadrerbart område. Då gäller att

Notation: $dV = dx\,dy\,dz$

$$\mathrm{vol}(D) = \iiint_D 1 \cdot dx\,dy\,dz$$

En vanligt förekommande situation är att D är ett område mellan två funktionsytor:

$$D = \{(x,y,z) \mid f(x,y) \le z \le g(x,y) \text{ och } (x,y) \in E\},$$

där $E \subseteq \mathbb{R}^2$ är <u>projektionen</u> av D på xy-planet (dvs skuggan som D skulle kasta på xy-planet om solen låg rakt ovanför längs z-axeln)

Notation: $E = \pi(D)$.

I så fall kan vi skriva:

$$\mathrm{vol}(D) = \iint_{\pi(D)} dx\,dy \int_{z=f(x,y)}^{z=g(x,y)} dz$$

$$= \iint_{\pi(D)} [g(x,y) - f(x,y)]\,dx\,dy$$

Notera att detta är ett exempel på en "2+1" Fubinis Sats för 3 variabler, där vi först integrerar bort en variabel (en enkelintegral, i detta fall bara $\int dz$) och har kvar en dubbelintegral.

Vi kan sedan tillämpa alla förra veckans tekniker på den återstående dubbelintegralen.

Ex 1: Beräkna volymen av, för $u \geq 0$

$$T = T_u = \{(x,y,z) \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x+y+z \leq u\}.$$

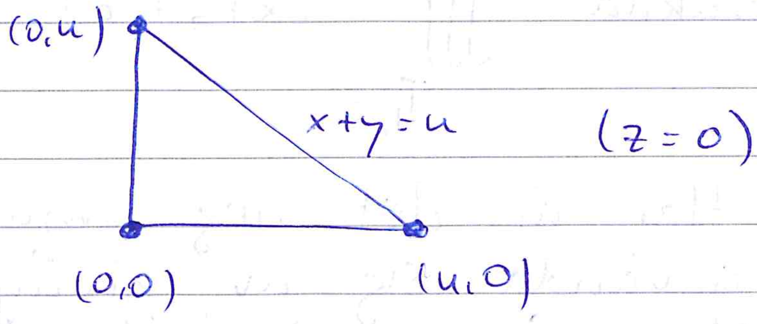
T_u är en <u>tetraheder</u> (den har fyra triangulära sidor som hör resp. till xy-planet, xz-planet, yz-planet och planet $x+y+z=u$).

Vi kan skriva

$$\mathrm{vol}(T_u) = \iint_{\Pi(T_u)} dx\,dy \int_{z=0}^{z=u-x-y} dz$$

$$= \iint_{\Pi(T_u)} dx\,dy\,(u-x-y),$$

där $\Pi(T_u)$ är projektionen av T_u på xy-planet, dvs dess triangulära sida i det planet:



Således kan vi tillämpa Fubini även på den återstående dubbelintegralen:

$$\mathrm{vol}(T_u) = \int_0^u dx \int_0^{u-x} (u-x-y)\,dy$$

$\longrightarrow$

$$= \int_0^u dx \left[(u-x)y - y^2/2 \right]_{y=0}^{y=u-x}$$

$$= 1/2 \int_0^u (u-x)^2 \, dx$$

$$\overset{v=u-x}{=} 1/2 \int_0^u v^2 \, dv = u^3/6 .$$

Fråga: Den n-dimensionella enhetstetrahedern $T_{1,n}$ ges av

$$T_{1,n} = \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0 \ \forall i = 1, \dots, n \text{ och } x_1 + \dots + x_n \leq 1 \}$$

Kan du gissa $\mathrm{vol}(T_{1,n})$?

Ex. 2 Beräkna $\iiint_{T_{1,3}} (x+y+z)^2 \, dV$

Lösning: Här är det nog smartast att använda sig av nivåytor (motsvar-ighet till nivåkurvor i dubbelintegralsberäkning)

Låt
$$g(x,y,z) = x+y+z$$
$$h(u) = u^2$$

Notera att $0 \leq g(x,y,z) \leq 1 \quad \forall (x,y,z) \in T_{1,3}$

Motsvarigheten till (29), s. 271 är

$$\iiint_D h(g(x,y,z))\,dx\,dy\,dz = \int_a^b h(u)V'(u)\,du,$$

där $a \le g(x,y,z) \le b \quad \forall (x,y,z) \in D$

och $V(u) = \mathrm{vol}\{(x,y,z) \in D \mid g(x,y,z) \le u\}$

I vårt exempel är $V(u) = \mathrm{vol}(T_u)$
$= \frac{u^3}{6}$

$$\Rightarrow \int_0^1 u^2 \cdot \frac{d}{du}\left(\frac{u^3}{6}\right) du = \frac{1}{10}.$$

Cylindriska Koordinater

Ett exempel på ett "2+1" koordinatbyte där vi byter till ~~mot~~ polära koordinater i xy-planet men behåller z-koordinaten

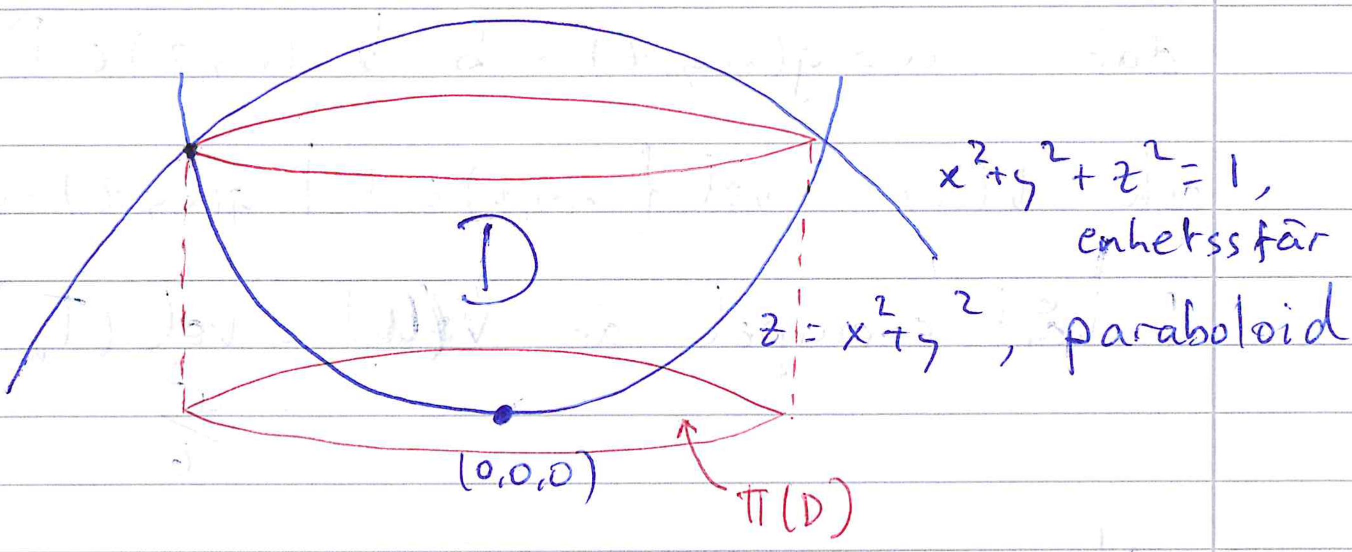
$$(x,y,z) \longleftrightarrow (r,\theta,z)$$

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$
$$z = z$$

$\longrightarrow$

$$\Rightarrow \quad dV = dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\theta\,dz$$

Ex: 3 Bestäm volymen av området som begränsas av ytan $z = x^2+y^2$ och enhetssfären.



Lösning:

$$\mathrm{vol}(D) = \iint_{\pi(D)} dx\,dy \int_{z=x^2+y^2}^{z=\sqrt{1-x^2-y^2}} dz$$

$$= \iint_{\pi(D)} \left(\sqrt{1-x^2-y^2} - (x^2+y^2) \right) dx\,dy$$

Det är uppenbart (hoppas jag) att man ska nu byta till polära koordinater, ty $\pi(D)$ är en cirkelskiva. Vi måste först ta reda på dess radie R genom att sätta

$$z = \sqrt{1-x^2-y^2} = x^2+y^2$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{1-R^2} = R^2$$

$$\Rightarrow \quad 1-R^2 = R^4$$

$u = R^2$

$$\Rightarrow \quad u^2 + u - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad u = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Men $u = R^2 \geqslant 0 \Rightarrow u = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

$$\Rightarrow \quad R = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} := R_0$$

Då har vi följande dubbelintegral i polära koordinater:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{R_0} \left(\sqrt{1-r^2} - r^2\right) r \, dr \, d\theta$$

$$= 2\pi \left[\int_0^{R_0} r\sqrt{1-r^2}\, dr - \int_0^{R_0} r^3 \, dr \right]$$

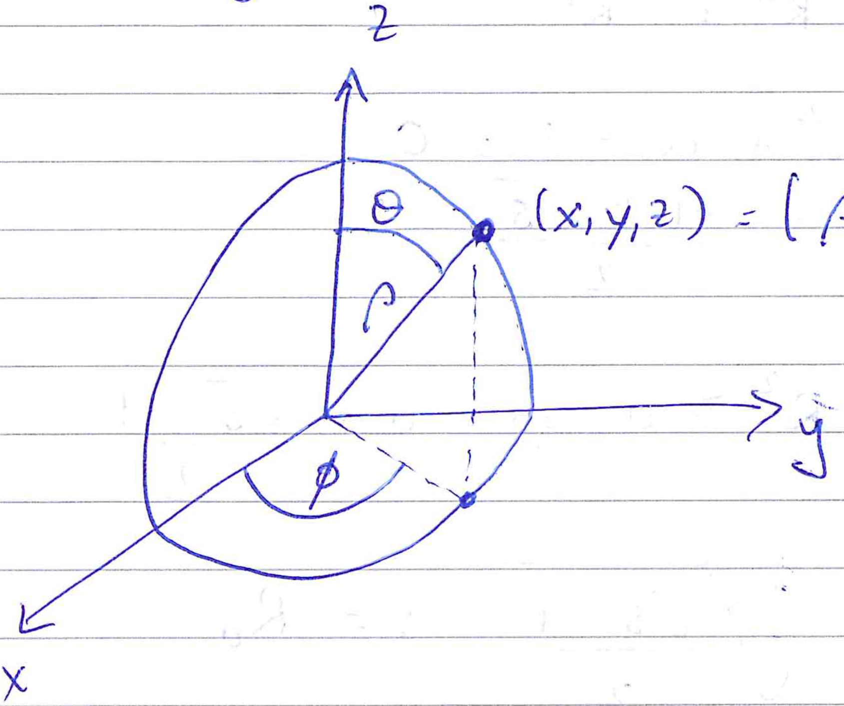
$$\overset{u = 1-r^2}{=} 2\pi \left[\frac{1}{2}\int_{1-R_0^2}^{1} \sqrt{u}\, du - \frac{R_0^4}{4} \right]$$

$$= \ldots = 2\pi \left[\frac{1}{3}\left(1-(1-R_0^2)^{3/2}\right) - R_0^4/4 \right]$$

SVAR

Sfäriska Koordinater

Ett exempel på ett "rent" 3-dimensionellt koordinatbyte.



$(x, y, z) = (\rho, \theta, \phi)$

$$x = \rho \sin\theta \cos\phi$$
$$y = \rho \sin\theta \sin\phi$$
$$z = \rho \cos\theta$$

Lv 2: $dV = dx\,dy\,dz = |J(\rho, \theta, \phi)|\, d\rho\, d\theta\, d\phi$

$$= \left| \frac{d(x,y,z)}{d(\rho,\theta,\phi)} \right| d\rho\, d\theta\, d\phi$$

$$\Rightarrow \boxed{dx\,dy\,dz = \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\phi}$$

Ex. 4 Vi vet sedan tidigare att ett klot av radie r har volym $\frac{4\pi}{3} r^3$.

Låt oss kontrollera att vi får detta från sfäriska koordinater.

För klotet av radie r kring $(0,0,0)$ i sfäriska koordinater gäller:

$0 \leq \rho \leq r, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi$

Alltsa:

$$\text{Volymen} = \iiint_{\text{klotet}} 1 \, dx\, dy\, dz$$

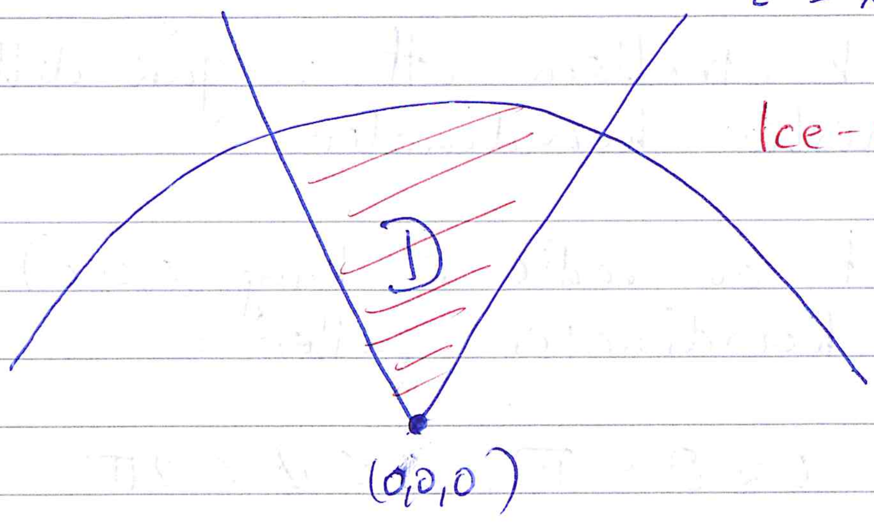
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{r} \rho^2 \sin\theta \, d\rho\, d\theta\, d\phi$$

$$= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^{r} \rho^2 \, d\rho$$

$$= 2\pi * 2 * \frac{r^3}{3} = \frac{4\pi}{3} r^3$$

V.S.V.

Ex. 5 Bestäm volymen av området som begränsas av ytan $z = +\sqrt{x^2+y^2}$ och enhetssfären.



Detta är snarlik Ex. 3, förutom att vi har en kon i stället för en paraboloid.

Lösning 1 Använd cylindriska koordinater såsom i Ex. 3

$$\mathrm{vol}(D) = \iint_{\pi(D)} dx\,dy \int_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{z=\sqrt{1-x^2-y^2}} dz$$

$$= \iint_{\pi(D)} \left(\sqrt{1-x^2-y^2} - \sqrt{x^2+y^2}\right) dx\,dy$$

Vi måste först ta reda på radien av cirkelskivan $\pi(D)$:

$$z = \sqrt{1-x^2-y^2} = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1-R^2} = R$$

$$1-R^2 = R^2$$

$$R = \sqrt{2}$$

Byt till polära koordinater:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} \left(\sqrt{1-r^2} - r\right) r\, dr\, d\theta$$

$= \ldots$ liknar Ex. 3 $\ldots$

$$= \frac{2\pi}{3}\left(1 - 1/\sqrt{2}\right).$$

Enklare

Lösning 2 Eftersom vi har en kon är det lätt att beskriva D i sfäriska koordinater: θ har nämligen en konstant övre gräns:

$$D : \left\{ (\rho, \theta, \phi) \mid 0 \le \rho \le 1,\ 0 \le \theta \le \pi/4,\ 0 \le \phi \le 2\pi \right\}$$

$$\Rightarrow \text{vol}(D) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^1 \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\phi$$

$$= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/4} \sin\theta\, d\theta \int_0^1 \rho^2\, d\rho$$

$$= 2\pi * \left(1 - 1/\sqrt{2}\right) * 1/3 = \frac{2\pi}{3}\left(1 - 1/\sqrt{2}\right),$$

v.s.v.