

Sammanfattning av föreläsningar i MVE035/MVE600 Flervariabelanalys, LV1

Simon Dovrén, Sebastian Karlsson, Joel Nilsson,
Jakob Olsson, Joel Sandås, Emma Ödman

29 januari 2021

1 Introduktion

Läsvecka ett i Flervariabelanalysen kan bland annat sammanfattas med dessa punkter:

- Partiell derivata och gradient
- Differentierbarhet
- Tangentplan
- Klassen C och Clairauts sats
- Kedjeregeln
- Riktningsderivata
- Nivåtor

Största skillnaden från föregående läsperioder är att vi har gått från att analysera funktioner av en variabel, till flera. Från linjen $\mathbb{R}$ inkluderar vi nu funktioner som tillhör godtyckligt $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$.

2 Partiell derivata

En viktig del av matematisk analys är deriverbarhet/differentierbarhet av funktioner. I fallet då funktionen endast har en variabel kan denna derivatan vara enklare att beräkna, medan problem kan uppstå när antalet variabler ökar. I envariabelanalys kan deriverbarhet bland annat beskrivas med följande definition:

Låt $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara en funktion av en variabel. Funktionen f sägs vara deriverbar i punkten $x = a$ om

- f är definierad i en omgivning av $x = a$ och
- gränsvärdet

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existerar.

Denna formulering kan även skrivas som en förändringshastighet, det vill säga

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

I flera dimensioner finns dock flera ingångsvägar till en punkt, och därmed flera olika förändringshastigheter. Detta försvårar beräkningen eftersom att dessa förändringshastigheter i allmänhet inte är likadana, och beror alltså på riktningen.

En aspekt av en funktion av högre grads differentierbarhet är att gå längs en axel för att närma sig en punkt – det vill säga låta x eller y vara konstant i fallet med två variabler.

Ett exempel på detta är funktionen $f(x, y) = x^6 \cdot y^2 + e^{3xy}$. Då blir den partiella derivatan med avseende på x

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x, y) = 6x^5 \cdot y^2 + 3ye^{3xy}. \quad (1)$$

Den partiella derivatan med avseende på y blir då

$$\frac{\partial f}{\partial y} f_y(x, y) = 2y \cdot x^6 + 3xe^{3xy}. \quad (2)$$

Man har samma tillvägagångssätt när man skall beräkna den partiella derivatan av en funktion med fler variabler än två, då det endast är en variabel som varierar och resterande hålls konstanta.

Definitionen för partiell derivata lyder som följande:

Låt $f : \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}$ vara en funktion av n variabler, det vill säga $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Om funktionen är definierad i en omgivning av $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, där $a \in D_f$ och gränsvärdet

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_i + h, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h}$$

existerar, är f deriverbar i punkten a med avseende på x_i . Dess partiella derivata $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ges då av gränsvärdet.

2.1 Gradient

Gradienten av en differentierbar funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ av n variabler består av funktionens alla partiella derivator, och definieras som $\nabla f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ där

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right). \quad (3)$$

Gradienten i en punkt $\mathbf{a} \in D(f)$ ges av $\nabla f(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_n} \right)$

3 Differentierbarhet

Differentierbarhet är ett begrepp som används för att generalisera deriverbarhet till flera dimensioner.

3.1 Alternativ form till deriverbarhet

Sätt $\rho(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a)$ att $f'(a)$ existerar $\Leftrightarrow \rho(h) \rightarrow 0$ då $h \rightarrow 0$

Vi skriver om till

$$f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + h \cdot \rho(h) \quad (4)$$

där $\rho(h) \rightarrow 0$ då $h \rightarrow 0$

Denna formel går att applicera i en formel där $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ till formeln

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + A \cdot h + B \cdot k + \sqrt{h^2 + k^2} \cdot \rho(h, k) \quad (5)$$

där $\rho(h, k) \rightarrow 0$ då $h, k \rightarrow 0$ där $A = \frac{\partial f}{\partial x}$ och $B = \frac{\partial f}{\partial y}$.

Att $A = \frac{\partial f}{\partial x}$ och $B = \frac{\partial f}{\partial y}$ går att bevisa genom att sätta $k := 0$ och låta $h \rightarrow 0$

Bevis

Sätt $k := 0$ och låt $h \rightarrow 0$

$$f(a+h, b) = f(a, b) + A \cdot h + |h| \cdot \rho(h, 0) \quad (6)$$

$$\Rightarrow A = \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} \pm \rho(h, 0) \quad (7)$$

Låt $h \rightarrow 0$

$$A = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} \quad (8)$$

Detta är per definition $\frac{\partial f}{\partial x}$

Detta beviset fungerar även att bevisa att $B = \frac{\partial f}{\partial y}$ genom att sätta $h := 0$ och låta $k \rightarrow 0$

3.2 Differentierbarhet i flera dimensioner

Vi kan med hjälp av vår funktion 5 generalisera ekvationen till flera dimensioner med hjälp av vektorer. För att detta skall gälla har vi två kriterier

- (i) $\exists \varepsilon > 0$ så att $\mathbf{a} + \mathbf{h} \in D(f)$ då $\|\mathbf{h}\| < \varepsilon$
- (ii) Det finns en konstant vektor $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^n$ och en funktion $\rho: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ så att

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \mathbf{A} \cdot \mathbf{h} + \|\mathbf{h}\| \cdot \rho(\mathbf{h}) \quad (9)$$

där $\rho(\mathbf{h}) \rightarrow 0$ då $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$ Detta kan även skrivas med $\nabla f(\mathbf{a})$ där $\nabla f(\mathbf{a})$ ersätter $\mathbf{A}$ så vi får

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} + \|\mathbf{h}\| \cdot \rho(\mathbf{h}) \quad (10)$$

3.3 Undersöka om en funktion är differentierbar

Sats:

Låt $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ vara en funktion av n variabler och låt $D \subseteq \mathbb{R}^n$ vara en domän. Om alla f 's partiella derivator existerar och är kontinuerliga i hela $D(f)$ av n variabler, då är f differentierbar i hela $D(f)$. Det går också att bevisa f 's differentierbarhet genom att bevisa att $\rho(h, k) \rightarrow 0$ då $h, k \rightarrow 0$ i ekvation 5

4 Tangentplan

I envariabelanalys är tangenten till en endimensionell funktion en linje som befinner sig i det tvådimensionella planet. Om man istället har en funktion av två variabler blir tangenten ett tangentplan som befinner sig i det tredimensionella rummet. För att finna ekvationen till detta tangentplan så använder man sig av definitionen för differentierbarhet (11).

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + A \cdot h + B \cdot k + \sqrt{h^2 + k^2} \cdot \rho(h, k) \quad (11)$$

Här är termen $\sqrt{h^2 + k^2} \cdot \rho(h, k)$ en felterm som man inte behöver ta hänsyn till vid uträkning av tangentplanet. Konstanterna A och B är de partiella derivatorna i x - respektive y -led, vilket sammantaget ger ekvation 12.

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + f_x(a, b) \cdot h + f_y(a, b) \cdot k \quad (12)$$

Funktionen f befinner sig i det tredimensionella rummet och kan således sättas till $z = f(x, y)$, vilket gör att $z_0 = f(a, b)$. Detta ger att $h = x - a$ och $k = y - b$. I detta resonemang har vi utgått ifrån att vi vill veta tangentplanet i punkten $(a, b, f(a, b))$, men en betydligt mer vanlig notation är att vilja ta reda på tangentplanet i punkten (x_0, y_0, z_0) . Därför är det denna notation som används i den slutgiltiga formeln för tangentplanets ekvation.

$$z = z_0 + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) \quad (13)$$

5 Klassen C^k

Definition: Låt $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ och D vara en öppen mängd så att $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Då säger vi att f tillhör klassen C^k , vilket betecknas $f \in C^k$, om f 's alla partiella derivator av grad mindre eller lika med k existerar och är kontinuerliga i D .

6 Clairauts sats för C^2

Låt $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ och $f \in C^2$. Då är $f_{xy} = f_{yx}$. Med ord kan detta beskrivas som att det inte påverkar vilken partiell derivata vi deriverar med avseende på först.

7 Kedjeregeln

Kedjeregeln är en regel inom matematisk analys för derivering av sammansatta funktioner, om exempelvis f och g är deriverbara funktioner så anger kedjeregeln derivatan av den sammansatta funktionen $f \circ g$ enligt: $\frac{d(f \circ g(t))}{dt} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dt}$.

Där $\frac{df}{dg}$ kallas för den sammansatta funktionens *yttre* derivata och $\frac{dg}{dt}$ kallas för dess *inre* derivata. Kedjeregeln är applicerbar för även ekvationer av högre ordning, för att visa detta definieras funktionerna f och g som funktioner av flera variabler enligt följande: $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$.

För att visa hur sammansättningen $f \circ g$ deriveras genom kedjeregeln delas den sammansatta funktionen $f \circ g$ upp i tre olika fall.

7.1 Fall 1: $p = 1$, n godtyckligt tal

I detta fall gäller: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Den sammansatta funktionen är beroende av en vektor $\mathbf{t}$ av n variabler, funktionens partiella derivata med avseende på den j :te variabeln i vektorn $\mathbf{t}$ beräknas då genom att multiplicera den yttre derivatan, $\frac{df}{dg}$, med den inre partiella derivatan, $\frac{\partial g}{\partial t_j}$.

$$\text{Alltså: } \frac{\partial f(g(\mathbf{t}))}{\partial t_j} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{\partial g}{\partial t_j}.$$

7.2 Fall 2: $n = 1$, p godtyckligt tal

I detta fall gäller: $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$.

Funktionen $\mathbf{g}$ bildar således en vektor i p st variabler, i detta fall beräknas derivatan av $f \circ \mathbf{g}$ med en summa av varje yttre partiella derivata med avseende på respektive variabel i vektorn $\mathbf{g}$ multiplicerat med den inre derivatan av denna variabel i $\mathbf{g}$.

Derivatan av den sammansatta funktionen $f \circ \mathbf{g}$ beräknas genom att multiplicera den partiella derivatan av $f \circ \mathbf{g}$ med avseende på den första termen g_1 i vektorn $\mathbf{g}$. Förenklat kan detta skrivas:

$$\frac{df(\mathbf{g})(t)}{dt} = \frac{\partial f(\mathbf{g})(t)}{\partial g_1} \cdot \frac{dg_1}{dt} + \frac{\partial f(\mathbf{g})(t)}{\partial g_2} \cdot \frac{dg_2}{dt} + \dots + \frac{\partial f(\mathbf{g})(t)}{\partial g_p} \cdot \frac{dg_p}{dt}.$$

Vilket kan sammanfattas som följande:

$$\frac{df(\mathbf{g}(t))}{dt} = \sum_{k=1}^p \left(\frac{\partial f(\mathbf{g}(t))}{\partial g_k} \cdot \frac{dg_k}{dt} \right)$$

7.3 Fall 3: n, p godtyckliga tal

I detta fall gäller $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$.

Fall 3 kan även benämnas som det *allmänna fallet* ty då både n och p är godtyckliga kan de tidigare fallen härledas utifrån denna allmänna formel. För att få en mer lättläst formel kommer vi uttrycka funktionerna på vektorform. Analogt med fall 2 blir $\mathbf{g} = (g_1(\mathbf{t}), \dots, g_p(\mathbf{t}))$ en vektor av p stycken differentierbara funktioner. Varje funktion $g_i(\mathbf{t})$ kan i sin tur vara funktioner av n stycken

variabler t_i . Vi får därför en vektor $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)$ analog med den i fall 1. Med denna notation kan vi då slutligen uttrycka den sammansatta funktionen som $f(\mathbf{g}(\mathbf{t}))$.

Den allmänna formeln för beräkningar av sammansatta skalärvärda differentierbara funktioner med avseende på en specifik variabel fås då som följande;

$$\frac{\partial f(\mathbf{g}(\mathbf{t}))}{\partial t_j} = \sum_{k=1}^p \left(\frac{\partial f(\mathbf{g}(\mathbf{t}))}{\partial g_k(\mathbf{t})} \cdot \frac{\partial g_k(\mathbf{t})}{\partial t_j} \right)$$

Det inses lätt att om man skulle låta $p = 1$ så fås endast en term i summan och detta skulle motsvara samma ekvation som i fall 2.

7.4 Tillämpningar av kedjeregeln

En vanlig tillämpning är vid lösning av partiella differentialekvationer. Detta genom att göra ett smart variabelbyte och beräkna de partiella derivatorna i den nya variabeln med hjälp av kedjeregeln. Om man gjort ett lämpligt byte av variabler kan man då få en differentialekvation som är enklare att lösa. Betrakta följande exempel;

Transformerar den partiella differentialekvationen

$$\frac{\partial f}{\partial x} - 3 \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

genom att införa de nya variablerna

$$\begin{cases} u = 3x + y \\ v = x \end{cases}$$

Enligt kedjeregeln fall 1 kan vi uttrycka den partiella derivatan i den nya variablerna u och v som

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot 3 + \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot 0 = \frac{\partial f}{\partial u} \end{cases}$$

Differentialekvationen i de nya variablerna blir då endast

$$\frac{\partial f}{\partial v} = 0$$

som är enkel att beräkna.

8 Riktningsderivata

Riktningsderivatan för en $f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ liknar de partiella derivatorna. Skillnaden är att istället för att närma sig en origo längs en koordinataxel, så närmar

man sig en godtycklig punkt $\mathbf{a} \in D(f)$ i en godtycklig riktning $\hat{\mathbf{u}}$, där $\hat{\mathbf{u}}$ är en enhetsvektor. Riktningsderivatan för f i $\mathbf{a}$ med riktningen $\hat{\mathbf{u}}$ definieras enligt

$$f_{\hat{\mathbf{u}}}(\mathbf{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + h \cdot \hat{\mathbf{u}}) - f(\mathbf{a})}{h}. \quad (14)$$

Det går även att uttrycka $f_{\hat{\mathbf{u}}}$ i en skalärprodukt, enligt $f_{\hat{\mathbf{u}}} = \nabla f(\mathbf{x}) \bullet \hat{\mathbf{u}}$. Detta kan bevisas på följande vis: Givet ett $\mathbf{a}$ och ett $\hat{\mathbf{u}}$ och att f är differentierbar i $\mathbf{a}$ så kan man linjärisera vilket ger 15.

$$f(\mathbf{a} + h\hat{\mathbf{u}}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (h\hat{\mathbf{u}}) + \|h\hat{\mathbf{u}}\| \cdot \rho(h\hat{\mathbf{u}}) \quad (15)$$

Dividerar man detta med h får man ekvation 16.

$$\frac{f(\mathbf{a} + h\hat{\mathbf{u}}) - f(\mathbf{a})}{h} = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \hat{\mathbf{u}} \pm \rho(h\hat{\mathbf{u}}) \quad (16)$$

Då $\rho(h\hat{\mathbf{u}}) \rightarrow 0$ när $h \rightarrow 0$ leder detta till den slutgiltiga ekvationen 17 som avslutar beviset då V.L per definition är riktningsderivatan.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\hat{\mathbf{u}}) - f(\mathbf{a})}{h} = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \hat{\mathbf{u}} \quad (17)$$

Den största möjliga riktningsderivatan för f i $\mathbf{a}$ pekar i samma riktning som gradienten, $\nabla f(\mathbf{a})$, och har storleken $\|\nabla f(\mathbf{a})\|$. Detta följer av definitionen av skalärprodukt, $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos(\theta)$. $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är i detta fallet vektorerna $\nabla f(\mathbf{a})$ och $\hat{\mathbf{u}}$, och θ är vinkeln mellan dem. $\cos(\theta)$ är som störst då $\theta = 0$ och $\|\hat{\mathbf{u}}\|$ är per definition = 1. Det medför att $f_{\hat{\mathbf{u}}_{max}} = \|\nabla f(\mathbf{a})\| \|\hat{\mathbf{u}}\| \cos(\theta) = \|\nabla f(\mathbf{a})\| \cdot 1 \cdot 1$ och slutligen att

$$f_{\hat{\mathbf{u}}_{max}} = \|\nabla f(\mathbf{a})\|. \quad (18)$$

8.1 Nivåytor

När en funktion av flera variabler sätts lika med en konstant, kallas den får en nivåyta. Låt $f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ vara en funktion och $C \in \mathbb{R}$ vara en konstant. Då är en n -dimensionell nivå(hyper)yta av nivå C mängden av alla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1}$ så att $f(\mathbf{x}) = C$. Det generella namnet är nivåyta, men för $n = 1$ kan det kallas nivåkurva och för $n > 2$ kan det kallas nivåhyperyta. Riktningsderivatan i punkten $\mathbf{a} \in D(f)$ med riktning längs tangentplanet i $\mathbf{a}$ kommer att vara 0, då $f_{\hat{\mathbf{u}}} = 0$ innebär att f hålls konstant i $\hat{\mathbf{u}}$ s riktning. Ekvationen för $f_{\hat{\mathbf{u}}}$, $f_{\hat{\mathbf{u}}} = \|\nabla f(\mathbf{a})\| \|\hat{\mathbf{u}}\| \cos(\theta)$ är endast lika med 0 då $\theta = \frac{\pi}{2}$. Det medför att $\nabla f(\mathbf{a})$ är en normal till nivåytan i $\mathbf{a}$, och tangentplanet i samma punkt.