

Sammanfattning LV1 Flervariabelanalys

Grupp 1C:

Samuel Martinsson

Alexander Mayer

Georg Persson

Jan Kula

Jarl Dang

August Wiklund

Januari 2021

Innehåll

1	Introduktion till flervariabelanalys	4
1.1	Funktioner av flera variabler	4
1.2	Derivata i en variabel	4
1.3	Partiell derivata	5
2	Differentierbarhet	6
2.1	Differentierbarhetsbergreppet	6
2.2	Partiella derivator och linjäriseringsformeln	6
2.3	Bevis av differentierbarhet för en specifik funktion	7
2.3.1	Rigoröst med hjälp av ρ	7
2.3.2	Med hjälp av f 's partiella derivator	7
2.4	Differentierbarhet implicerar kontinuitet	8
2.5	Differentierbarhet och tangentplan	8
3	Kedjeregeln	9
3.1	Kedjeregeln i en variabel	9
3.2	Sammansättningar i flera variabler	9
3.3	Kedjeregeln i flera variabler	9
3.3.1	Formulering 1	10
3.3.2	Formulering 2	10
3.3.3	Formulering 3	11
4	Gradient	12
4.1	Definitionen av gradient	12
4.2	Definitionen av riktningsderivata	12

4.3	Sats 2.4.6	13
4.4	Sats 2.4.7	13
4.4.1	Bevis	13
5	Nivåtor	14
5.1	Bevis för sats 2.4.8	14
6	Clairauts sats	14

1 Introduktion till flervariabelanalys

1.1 Funktioner av flera variabler

Inom flervariabelanalys vill vi kunna analysera funktioner från det euklidiska rummet med n dimensioner, till det euklidiska rummet med m dimensioner, d.v.s

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

för godtyckliga $n, m \in \mathbb{N}$. Det finns olika benämningar på dessa funktioner, beroende på vilka värden n och m antar:

$m = 1$: skalärvärd funktion

$m \geq 1$: vektorvärd funktion

$n = m$: vektorfält

I kursen ligger fokus främst på skalärvärda funktioner av godtyckligt många variabler, men även vektorvärda funktioner och vektorfält diskuteras.

1.2 Derivata i en variabel

För att analysera funktioner av fler än en variabel, behöver derivata-begreppet generaliseras till högre dimensioner. För att göra detta, behöver vi påminna oss om definitionen av derivata och deriverbarhet i fallet med en variabel.

Det finns huvudsakligen tre sätt att definiera deriverbarhet:

- (1) Första formuleringen är förmodligen den vanligast förekommande i envariabelanalysen. Den lyder:

Låt $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, vara en funktion av en variabel och $x = a \in \mathbb{R}$ en reell punkt. Funktionen f är **deriverbar** i a om:

- i) f är definierad i en omgivning av a , d.v.s: $\exists \epsilon > 0$ s.a. $|x - a| < \epsilon \implies x \in D(f)$

ii)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ existerar} \quad (1)$$

Gränsvärdet kallas funktionens **derivata** i a , vilket vanligtvis betecknas $f'(a)$.

(2) Andra formuleringen kräver införandet av en funktion

$$\rho(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a)$$

Vi kan observera att första termen i funktionen är samma kvot vars gränsvärde, om det existerar, är $f'(a)$ då h går mot noll. Alltså gäller:

$$f'(a) \text{ existerar} \iff \lim_{h \rightarrow 0} \rho(h) = 0$$

Vi kan därför formulera en ytterligare definition av deriverbarhet:

Låt $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, vara en funktion av en variabel och $x = a \in \mathbb{R}$ en reell punkt. Funktionen f är **deriverbar** i a om:

- i) f är definierad i en omgivning av a
- ii) det existerar en funktion $\rho(h)$ och en konstant $A \in \mathbb{R}$ s.a.

$$f(a+h) = f(a) + hA + h\rho(h) \quad (2)$$

där $\lim_{h \rightarrow 0} \rho(h) = 0$.

Ekvationen i ii) kallas **linjäriseringen** av f

(3) Den tredje formuleringen är rent geometrisk och lyder:

Låt $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, vara en funktion av en variabel och $x = a \in \mathbb{R}$ en reell punkt. Funktionen f är **deriverbar** i a om det finns en unik tangent till f 's graf, i punkten a .

1.3 Partiell derivata

För att generalisera derivatan till funktioner av flera variabler, så som den beskrivs i den första formuleringen av deriverbarhet (1), kan vi ta derivatan med avseende på en variabel och betrakta övriga som konstanta. Detta ger oss den partiella derivatan:

Låt $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ vara en funktion av n variabler och $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ vara en punkt. Om gränsvärdet

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{a})}{h}, \quad \mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \quad (3)$$

existerar, så är f **partiellt deriverbar** med avseende på x_j i punkten a .

Gränsvärdet kallas för den **partiella derivatan** av f , med avseende på x_j , i punkten $\mathbf{a}$. Detta betecknas vanligen $f_{x_j}(\mathbf{a})$ eller $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a})$.

2 Differentierbarhet

2.1 Differentierbarhetsbegreppet

En funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ av en variabel sägs vara deriverbar om dess derivata existerar. Detta medför bland annat att funktionen f är kontinuerlig i varje punkt där den är deriverbar. För att generalisera begreppet deriverbarhet till högre dimensioner inför vi begreppet differentierbarhet.

Låt $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ och $\mathbf{a}$ vara en inre punkt i f 's definitionsmängd. f är differentierbar i punkten $\mathbf{a}$ om:

i) f är definierad i en omgivning av $\mathbf{a}$, d.v.s:

$$\exists \epsilon > 0 \text{ s.a. } |x - \mathbf{a}| < \epsilon \implies x \in D(f).$$

ii) f kan approximeras linjärt enligt ekvation (4) nedan.

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \sum_{k=1}^n A_k \mathbf{h}_k + \|\mathbf{h}\| \rho(\mathbf{h}), \text{ där } \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \rho(\mathbf{h}) = 0 \quad (4)$$

Den linjära approximationen för en funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ av två variabler ser följaktligen ut som:

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + Ah + Bk + \sqrt{h^2 + k^2} \rho(h, k) \quad (5)$$

där $\rho(h, k) \rightarrow 0$ då $(h, k) \rightarrow (0, 0)$.

2.2 Partiella derivator och linjäriseringsformeln

Vid närmare undersökning visar det sig att konstanterna A_k i de linjära termerna i (4) motsvaras av f 's partiella derivata m.a.p. x_k . Detta går att visa enkelt genom att studera uttrycket för A_k . För läsarens bekvämlighet och överskådlighetens skull görs detta endast för en funktion av två variabler, med grund i (5). Dock fungerar det givetvis på samma sätt för en funktion av n variabler. Vi börjar med att skriva om (5), eftersom vi endast är intresserade av den partiella derivatan m.a.p. x , och därmed endast är intresserade av förändringar i x -led.

$$f(a + h, b) = f(a, b) + Ah + |h| \rho(h, 0) \quad (6)$$

Vi löser ut A och får då:

$$A = \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h} \pm \rho(h, 0)$$

Vi låter $h \rightarrow 0$ och får följande uttryck för A :

$$A = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} \quad (7)$$

Detta känner vi igen från Avsnitt 1 som definitionen av f 's (partiella) derivata (m.a.p. x). På samma sätt fås B som den partiella derivatan m.a.p. y . Om vi generaliserar detta får vi A_k som den partiella derivatan m.a.p. x_k för en funktion av n variabler, i ekvation (4).

2.3 Bevis av differentierbarhet för en specifik funktion

2.3.1 Rigoröst med hjälp av ρ

För att bevisa att en funktion f är differentierbar i en punkt $a \in \mathbb{R}^n$, särskilt att f kan approximeras linjärt, krävs det att feltermen $\rho(\mathbf{h}) \rightarrow 0$ då $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$ enligt ekvation (4). Om så är fallet, är f differentierbar i a . Vi kan få ett uttryck för $\rho(\mathbf{h})$ genom att lösa ut den ur (4):

$$\rho(\mathbf{h}) = \frac{f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - \sum_{k=1}^n \mathbf{h}_k f_{x_k}(\mathbf{a})}{\|\mathbf{h}\|} \quad (8)$$

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - \sum_{k=1}^n \mathbf{h}_k f_{x_k}(\mathbf{a})}{\|\mathbf{h}\|} = 0 \quad (9)$$

Om vi kan visa $\rho(\mathbf{h}) \rightarrow 0$ då $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$, d.v.s. att (9) gäller, vid insättning av en specifik funktions partiella derivator och värden i en punkt, är funktionen differentierbar, eftersom den följdaktligen kan approximeras linjärt enligt (4).

2.3.2 Med hjälp av f 's partiella derivator

Ett annat sätt att bevisa differentierbarhet är genom att undersöka en funktions partiella derivator. Om de är kontinuerliga så är funktionen differentierbar. Först inför vi notationen $f \in C^1(D)$, vilket betyder att alla f 's partiella derivator existerar i hela D och är kontinuerliga funktioner av n variabler. Formellt kan vi därför skriva, att om:

$$f \in C^1(D) \implies f \text{ differentierbar i hela } D \quad (10)$$

Beviset kommer inte att redovisas i sin helhet, kortfattat går det ut på att visa att (9) alltid gäller om f 's partiella derivator är kontinuerliga. Detta kan göras genom att utnyttja medelvärdessatsen som gäller eftersom f 's partiella antas existera. Därefter används det andra antagandet om kontinuitet för att bevisa att $\rho(\mathbf{h}) \rightarrow 0$

2.4 Differentierbarhet implicerar kontinuitet

Om f är differentierbar så måste f vara kontinuerlig. Detta eftersom

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) \rightarrow f(\mathbf{a}) \text{ då } \mathbf{h} \rightarrow 0$$

enligt (4), vilket innebär just precis att f är kontinuerlig i punkten $\mathbf{a}$.

2.5 Differentierbarhet och tangentplan

Geometriskt kan differentierbarhet, särskilt linjäriseringsformeln (5), ses som att vi vill hitta ett tangentplan till grafen $z = f(x, y)$ i en punkt. Vi kan välja en punkt (x_0, y_0, z_0) . För att förenkla jämförelsen med linjäriseringsformeln kan vi också skriva om punkten som:

$$(x_0, y_0, z_0) \\ \begin{cases} x_0 = a \\ y_0 = b \\ z_0 = f(a, b) \end{cases}$$

Vi påminner oss om linjäriseringsformeln (5), men struntar i feltermen ρ och får därför en approximation. Vi ansätter även h som $x - x_0$ och k som $y - y_0$. Dessutom ersätter vi de linjära konstanterna A och B med f 's partiella derivator, vilket vi vet från Avsnitt 2.2 gäller för en differentierbar funktion :

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + Ah + Bk + \sqrt{h^2 + k^2} \rho(h, k) \quad (11)$$

$$\iff f(a + h, b + k) \approx f(a, b) + Ah + Bk$$

$$\iff f(x, y) = z \approx f(a, b) + Ah + Bk$$

$$\iff z \approx z_0 + f_x(a, b)(x - x_0) + f_y(a, b)(y - y_0) \quad (12)$$

Om vi hade en exakt likhet, vilket vi får när feltermen ρ i (11) går mot 0, skulle (12) vara ekvationen för ett plan:

$$f_x(a, b)(x - x_0) + f_y(a, b)(y - y_0) - (z - z_0) = 0 \quad (13)$$

Detta plan är således tangentplanet till den differentierbara funktionen f i punkten $(x_0, y_0, z_0) = (a, b, f(a, b))$.

3 Kedjeregeln

Även då vi analyserar funktioner av flera variabler stöter vi på olika sammansättningar av funktioner. Det är därför nödvändigt att avgöra hur vi kan partiellt derivera sammansättningar av funktioner i flera variabler. Vi behöver därför generalisera kedjeregeln från envariabelanalysen till högre dimensioner.

3.1 Kedjeregeln i en variabel

För att generalisera kedjeregeln, behöver vi påminna oss om hur den ser ut för funktioner av en variabel.

Låt $f, g \in \mathbb{R}$ vara deriverbara funktioner och $a \in \mathbb{R}$ uppfyller:

- a är en inre punkt till $D(g)$
- $g(a)$ är en inre punkt till $D(f)$

Då är sammansättningen $f \circ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deriverbar i a och

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a) \quad (14)$$

är dess derivata.

3.2 Sammansättningar i flera variabler

För att tala om sammansättningar i flervariabelanalys, behöver vi först definiera begreppet.

Låt $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ och $f : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^m$

- Sammansättningen $f \circ g$ är definierad om $p = q$
- $f \circ g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ om den är definierad

$$\begin{aligned} f &= f(x_1, \dots, x_p) = (f_1(x_1, \dots, x_p), \dots, f_m(x_1, \dots, x_p)) \\ g &= g(t_1, \dots, t_n) = (g_1(t_1, \dots, t_n), \dots, g_n(t_1, \dots, t_n)) \end{aligned}$$

3.3 Kedjeregeln i flera variabler

Vi introducerar kedjeregeln i flera variabler i gradvis mer generella steg, för att förenkla förståelsen. Den sista och mest abstrakta formuleringen, vilken gäller

för vektorvärda funktioner, kommer att presenteras nästa vecka. Här framförs de formuleringar som gäller för skalärvärda funktioner.

3.3.1 Formulering 1

$p = 1$, n godtyckligt

Låt $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ vara differentierbar och $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara deriverbar. Låt även $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ så att:

- $\mathbf{a}$ är en inre punkt i $D(g)$
- $g(\mathbf{a})$ är en inre punkt i $D(f)$

Då är sammansättningen $f \circ g$ differentierbar i $\mathbf{a}$ och

$$(f \circ g)t_j(\mathbf{a}) = f'(g(\mathbf{a})) \cdot g_{t_j}(\mathbf{a}) \quad (15)$$

Detta uttryck är väldigt likt kedjeregeln för en variabel, vilket beror på det faktum att när vi tar den partiella derivatan med avseende på en specifik variabel, så betraktas övriga som konstanta. Både f och g kan då ses som funktioner av en variabel. Denna formulering följer alltså direkt av den för en variabel och kan visas på samma sätt.

3.3.2 Formulering 2

p godtyckligt, $n = 1$

Låt $\mathbf{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$, $\mathbf{g}(t) = (g_1(t), \dots, g_p(t))$ och $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ vara differentierbara funktioner. Låt även $a \in \mathbb{R}$ så att:

- a är en inre punkt i $D(\mathbf{g})$, d.v.s. en inre punkt i $D(g_j) \forall j \in \{1, \dots, p\}$
- $\mathbf{g}(a)$ är en inre punkt i $D(f)$

Då är sammansättningen $f \circ \mathbf{g}$ differentierbar i a och

$$\frac{d}{dt}(f \circ \mathbf{g})(a) = \frac{d}{dt}f(g_1(a), \dots, g_p(a)) = \sum_{j=1}^p \frac{\partial}{\partial x_j}(f \circ \mathbf{g})(a) \cdot \frac{dg_j(a)}{dt} \quad (16)$$

För att visa att detta gäller, börjar vi med att sätta

$$\mathbf{a} = \mathbf{g}(a) = (g_1(a), \dots, g_p(a)), \quad \mathbf{a} + \mathbf{h} = \mathbf{g}(a + h) = (g_1(a + h), \dots, g_p(a + h))$$

Det är även användbart att införa en funktion $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(t) = (f \circ \mathbf{g})(t) = f(g_1(t), \dots, g_p(t)) \quad (17)$$

Eftersom f är differentierbar enligt antagandet i satsen, så gäller (4), alltså att det finns en funktion $\rho : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ så att

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \sum_{j=1}^p f_{x_j}(\mathbf{a})h_j + \|\mathbf{h}\|\rho(\mathbf{h}), \text{ där } \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \rho(\mathbf{h}) = 0$$

Vi observerar från (17) att $f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = F(a + h)$, vilket tillsammans med (4) ger oss

$$\frac{F(a + h) - F(a)}{h} = \frac{f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a})}{h} = \frac{\sum_{j=1}^p f_{x_j}(\mathbf{a})h_j + \|\mathbf{h}\|\rho(\mathbf{h})}{h} \quad (18)$$

Genom några omskrivningar kan $\mathbf{h}$ uttryckas i funktionerna g_j

$$\mathbf{h} = (\mathbf{a} + \mathbf{h}) - \mathbf{a} = (g_1(a + h) - g_1(a), \dots, g_p(a + h) - g_p(a)) \quad (19)$$

Eftersom g_j är deriverbara funktioner existerar det, enligt linjäriseringsekvationen (2), funktioner $\rho_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ så att

$$g_j(a + h) - g_j(a) = g'_j(a)h + h\rho_j(h), \text{ där } \lim_{h \rightarrow 0} \rho_j(h) = 0 \quad (20)$$

Sätter vi in detta i vårt uttryck för $\mathbf{h}$ (19), så får vi att

$$\mathbf{h} = h(g'_1(a) + \rho_1(h), \dots, g'_p(a) + \rho_p(h)) \quad (21)$$

Insättning av detta uttryck i (18), ger oss följaktligen

$$\begin{aligned} \frac{F(a + h) - F(a)}{h} &= \\ &= \sum_{j=1}^p f_{x_j}(\mathbf{a}) \cdot (g'_j(a) + \rho_j(h)) \pm \rho(\mathbf{h}) \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^p (g'_j(a) + \rho_j(h))^2} \end{aligned}$$

Om vi nu låter $h \rightarrow 0$ i detta uttryck, så får vi

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(a + h) - F(a)}{h} = \frac{d}{dt}(f \circ \mathbf{g})(a) = \sum_{j=1}^p \frac{\partial}{\partial x_j}(f \circ \mathbf{g})(a) \cdot \frac{dg_j(a)}{dt} \quad (22)$$

vilket skulle visas.

3.3.3 Formulering 3

n, p godtyckliga

Låt $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $\mathbf{g}(\mathbf{t}) = (g_1(t_1, \dots, t_n), \dots, g_p(t_1, \dots, t_n))$ vara en funktion av n variabler, s.a. varje g_j är en differentierbar funktion av en variabel, och $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ vara en differentierbar funktion av p variabler. Låt även $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ så att:

- $\mathbf{a}$ är en inre punkt i $D(\mathbf{g})$
- $\mathbf{g}(\mathbf{a})$ är en inre punkt i $D(f)$

Då är sammansättningen $f \circ \mathbf{g}$ differentierbar i $\mathbf{a}$ och

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_j}(f \circ \mathbf{g})(\mathbf{a}) &= \frac{\partial}{\partial t_j} f(g_1(a_1, \dots, a_n), \dots, g_p(a_1, \dots, a_n)) = \\ &= \sum_{k=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_k}(g_1(a_1, \dots, a_n), \dots, g_p(a_1, \dots, a_n)) \cdot \frac{\partial g_k(a)}{\partial t_j} \end{aligned} \quad (23)$$

Detta följer från föregående formulering (16), på samma sätt som vår första formulering (15) följde av kedjeregeln i en variabel (14).

4 Gradient

4.1 Definitionen av gradient

Gradienten till en differentierbar funktion f av n variabler är vektorfältet vars komponenter är de partiella derivatorna av f . Låt $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ vara en differentierbar funktion av n variabler. Gradienten till f definieras som:

$$\nabla f(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \quad (24)$$

och noteras som $\nabla f(\mathbf{a})$ för en godtycklig punkt $\mathbf{a}$.

4.2 Definitionen av riktningsderivata

För att kunna definiera vad en riktningsderivata är måste vi först definiera vad en riktning i $\mathbb{R}^n$ innebär. Mängden av alla riktningar i $\mathbb{R}^n$ definieras som mängden av alla Ortsvektorer av längd 1 i $\mathbb{R}^n$, som bildar den $(n-1)$ -dimensionella enhetssfären $S^{(n-1)}$. En riktning är alltså en enhetsvektor, som går ut till sfären. Nu när en riktning i $\mathbb{R}^n$ har definierats kan vi definiera vad en riktningsderivata är. Låt $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ vara en differentierbar funktion och $\mathbf{a}$ en inre punkt i definitionsmängden för f . Vi låter även $\hat{\mathbf{u}}$ vara en normerad vektor i $S^{(n-1)}$. Riktningsderivatan till f i $\mathbf{a}$ med riktning $\hat{\mathbf{u}}$ definieras då som följande:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{a}) = f_{\mathbf{u}}(\mathbf{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\hat{\mathbf{u}}) - f(\mathbf{a})}{h} \quad (25)$$

4.3 Sats 2.4.6

Låt $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ vara differentierbar i $\mathbf{x} = \mathbf{a}$. Då existerar riktningsderivatan $f_u(\mathbf{a})$ för varje $\hat{\mathbf{u}} \in S^{n-1}$ och:

$$f_u(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \hat{\mathbf{u}} \quad (26)$$

Beviset av detta följer från linjäriseringen av f då f är differentierbar i $\mathbf{x} = \mathbf{a}$. Enligt linjärisering i punkten $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ får vi följande ekvation:

$$f(\mathbf{a} + h\hat{\mathbf{u}}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (h\hat{\mathbf{u}}) + \|h\hat{\mathbf{u}}\|\rho(h\hat{\mathbf{u}}),$$

där $\rho(h\hat{\mathbf{u}}) \rightarrow 0$ då $h \rightarrow 0$. Subtraktion med $f(\mathbf{a})$ och division med h ger oss:

$$\frac{f(\mathbf{a} + h\hat{\mathbf{u}}) - f(\mathbf{a})}{h} = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\hat{\mathbf{u}}) \pm \rho(h\hat{\mathbf{u}})$$

Notera att längden hos vektorn $\hat{\mathbf{u}}$ är ett, således kan $\frac{\|h\hat{\mathbf{u}}\|}{h}$ skrivas som ± 1 . Låt nu $h \rightarrow 0$ och då ges riktningsderivatan av gradienten skalärt med vektorn $\hat{\mathbf{u}}$ av följande ekvation:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\hat{\mathbf{u}}) - f(\mathbf{a})}{h} = f_u(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\hat{\mathbf{u}}) \quad (27)$$

vilket bevisar satsen.

4.4 Sats 2.4.7

Låt $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ vara differentierbar i $\mathbf{x} = \mathbf{a}$. Då är riktningen på gradienten $\nabla f(\mathbf{a})$ riktningen som funktionen f i punkten $\mathbf{a}$ växer snabbast i. På samma sätt är storleken på denna tillväxthastighet $\|\nabla f(\mathbf{a})\|$.

4.4.1 Bevis

Beviset följer från simpel linjär algebra. Vi minns att formeln för skalärprodukt är

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \|\mathbf{v}_1\| \cdot \|\mathbf{v}_2\| \cos \theta,$$

där θ är vinkeln mellan $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$. I vårt fall är $\mathbf{v}_1 = \nabla f(\mathbf{a})$ och $\mathbf{v}_2 = \hat{\mathbf{u}}$ där $\hat{\mathbf{u}}$ är en riktningsvektor i S^{n-1} .

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{u}}(\mathbf{a}) &= \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \hat{\mathbf{u}} = \\ &= \|\nabla f(\mathbf{a})\| \cdot \|\hat{\mathbf{u}}\| \cdot \cos(\theta). \end{aligned}$$

Då $\|\hat{\mathbf{u}}\| = 1$ och $\|\nabla f(\mathbf{a})\|$ är en konstant beror $f_{\mathbf{u}}(\mathbf{a})$ endast på $\cos(\theta)$ och maximeras då $\cos(\theta) = 1 \iff \theta = 0$.

5 Nivåytor

Med en funktion $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ och en konstant $c \in \mathbb{R}$ kan vi skapa en ekvation

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = c$$

som *oftast* definierar en n -dimensionell (hyper)yta i $\mathbb{R}^{n+1}$. En sådan yta kallas, beroende på n för

$$\begin{aligned} n = 1 &: \text{nivåkurva} \\ n = 2 &: \text{nivåyta} \\ n > 2 &: \text{nivåhyperyta.} \end{aligned}$$

5.1 Bevis för sats 2.4.8

Antag att f är differentierbar och $\mathbf{a} \in D_f = \mathbb{R}^{n+1}$. Sätt $c := f(\mathbf{a})$ och $\hat{\mathbf{u}} \in S^n$. På samma sätt som i beviset för Sats 2.4.8 (4.4.1) använder vi formeln för skalärprodukt och får att

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{u}}(\mathbf{a}) = 0 &\iff \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \hat{\mathbf{u}} = 0 \\ &\iff \nabla f(\mathbf{a}) \perp \hat{\mathbf{u}} \end{aligned}$$

Alltså är riktningsderivatan 0 i riktningar ortogonala mot $\nabla f(\mathbf{a})$. Gradienten till f i punkten $\mathbf{a}$ är alltså en normalvektor till nivåkurvan/ytan genom punkten $\mathbf{a}$.

6 Clairauts sats

Om funktionen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ är C^2 i en omgivning till (x_0, y_0) är

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$