

LV1 sammanfattning i MVE035

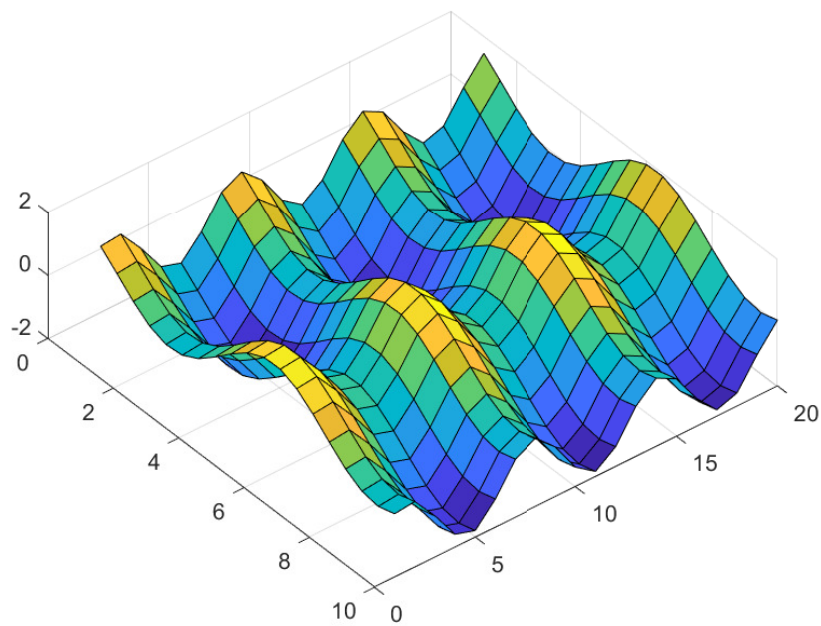
Agnes Brogeby Olof Darin Tess Ellertsson
Victor Enevold Lisa Hellström Emrik Östling

5 februari 2021

1 Analys i flera variabler

I flera variabler kan en generell derivata inte alltid bestämmas eftersom olika riktningar att närma sig en punkt kan ge olika förändringshastigheter. Därför blir det istället intressant att betrakta riktningsderivata, alltså lutningen i en viss riktning. Speciellt användbart blir partialderivata vilket är riktningsderivata i riktning med koordinataxlarna.

Betrakta funktionen $z = \cos x + \sin y$ nedan:



Figur 1: $z = \cos x + \sin y$

Här framgår det tydligt att funktionens lutning skiljer sig beroende på riktningen. De partiella derivatorna till funktionen kan bestämmas på samma sätt som vid derivering i envariabelanalys. Om $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ges definitionen

av de partiella derivatorna med avseende på x och y av

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) &= f_x(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) &= f_y(a, b) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a, b + k) - f(a, b)}{k}.\end{aligned}\tag{1}$$

För derivatan i x -led anses y vara en konstant och h representerar differensen i x -led. På samma sätt hålls x konstant och k representerar differensen för derivatan i y -led.

Vidare kan definitionen utvidgas till ett godtyckligt $\mathbb{R}^n$ där $n \geq 2$ genom att låta $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ där $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ är en funktion av n variabler. Låt därefter vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ samt $i \in \{1, \dots, n\}$. Den partiella derivatan med avseende på x_i ges då av

$$f_{x_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + h \cdot \mathbf{e}_i) - f(\mathbf{a})}{h},\tag{2}$$

där $\mathbf{e}_i$ är en basvektor i x_i -led.

2 Differentierbarhet

f är differentierbar i en punkt om f är definierad i en omgivning till (a, b) och det finns en funktion $\rho : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ så att:

$$\begin{aligned}f(a + h, b + k) &= f(a, b) + A \cdot h + B \cdot k + \sqrt{h^2 + k^2} \cdot \rho(h, k) \\ \rho(h, k) &\rightarrow 0 \text{ när } (h, k) \rightarrow (0, 0),\end{aligned}\tag{3}$$

där A är partialderivatan i x -led och B är partialderivatan i y -led. Exempelvis ges den partiella derivatan i x -led genom att sätta $k = 0$, lösa ut A och därefter låta h gå mot 0. Den partiella derivatan i y -led ges på motsvarande sätt genom att sätta $h = 0$ och sedan lösa ut B .

Att f är differentierbar i en punkt innebär att funktionen är kontinuerlig i samma punkt. Om $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ är differentierbar i $(a, b) \implies f$ är kontinuerlig i (a, b) . Bevis fås genom att i ekvation 3 låta $h, k \rightarrow 0$. I högerledet kommer alla termer utöver $f(a, b)$ gå mot 0 samtidigt som vänsterledet går mot $f(a, b)$, vilket visar att f är kontinuerlig i (a, b) .

Vidare sägs f vara differentierbar i en punkt i $\mathbb{R}^n$ om det finns en inre punkt i f 's definitionsmängd, en konstant vektor $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^n$ samt en funktion $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sådant att f uppfyller

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \mathbf{A} \cdot \mathbf{h} + |\mathbf{h}| \cdot \rho(\mathbf{h})\tag{4}$$

där $\mathbf{A}$ består av f :s partiella derivator och $\rho(\mathbf{h}) \rightarrow 0$ då $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$.

Vid studie av en funktions differentierbarhet är det även värdefullt att undersöka vad som sker vid upprepade differentiering. Clairauts sats säger att om funktionen f från $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$ är två gånger differentierbar i en omgivning till (a, b) så är

$$f''_{xy}(a, b) = f''_{yx}(a, b). \quad (5)$$

3 Existens av tangentplan

Betrakta ett plan med en baspunkt i (x_0, y_0, z_0) och en godtycklig punkt (x, y, z) i planet. Låt dessa punkter sammankopplas av en vektor $\mathbf{v}$ från baspunkten till den godtyckliga punkten. Låt en normalvektor $\mathbf{n}$ gå från baspunkten till en punkt (a, b, c) ovanför planet. Skalarprodukten av dessa vektorer ser ut som följande:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} &= 0 \\ a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) &= 0 \\ ax + by + cz &= d \end{aligned} \quad (6)$$

$ax_0 + by_0 + cz_0$ har här skrivits om till d . Notera att den sista ekvationen känns igen som ekvationen för ett plan. Genom att skriva om linjäriseringsformeln, ekvation 3, och bortse från feltermen, $\rho(h, k)$, kan likheten mellan dessa ekvationer påvisas. Detta görs genom att betrakta z som en funktion av x och y , så att $z = f(x, y)$ och $z_0 = f(x_0, y_0)$. h och k uttrycks som differenserna mellan punkterna x och x_0 , samt y och y_0 .

$$z \approx z_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - y_0) \quad (7)$$

Om det råder likhet mellan leden kan detta uttryck skrivas som

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - y_0) - (z - z_0) = 0 \quad (8)$$

vilket kan jämföras med ekvation 6. Detta visar på existensen av ett tangentplan i en godtycklig differentierbar punkt.

4 Kedjeregeln

Kedjeregeln i flervariabelanalys kan tillämpas till variabelbyten i partiella differentialekvationer. Den gäller sammansättningar av differentierbara funktioner. För att sammansättningen $f \circ g$, där

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^q &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ g : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^p, \end{aligned} \tag{9}$$

ska vara definierad måste $p = q$. Kedjeregeln är uppdelad i tre steg där

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^p &\rightarrow \mathbb{R} \\ g : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^p. \end{aligned} \tag{10}$$

Sammansättningen $f \circ g$ är alltså en skalärvärd funktion av n variabler.

Steg 1: $p = 1$ och n godtycklig. Sammansättningen skrivs $f(g(\mathbf{t}))$ där $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)$ och kedjeregeln uttrycks

$$\frac{\partial}{\partial t_j} f(g(\mathbf{t})) = f'(g(\mathbf{t})) \cdot \frac{\partial g}{\partial t_j}(\mathbf{t}). \tag{11}$$

Formeln följer av kedjeregeln för envariabelanalys. Då partiella derivatan tas med avseende på ett t_j hålls alla t_i , där $i \neq j$, konstanta och f och g kan behandlas som funktioner av en variabel. Enda skillnaden är att tecknen för partiell derivata används.

Steg 2: $n = 1$ och p godtycklig. Sammansättningen uttrycks som $f(\mathbf{g}(t))$ där $\mathbf{g} = (g_1(t), \dots, g_p(t))$ och kedjeregeln har formen

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{g}(t)) = \sum_{j=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{g}(t)) \cdot \frac{dg_j(t)}{dt}. \tag{12}$$

Beviset bygger på linjäriseringen, ekvation 3, och att f och varje g_i i vektorn är differentierbara.

Steg 3: n och p godtyckliga. Sammansättningen har formen $f(\mathbf{g}(\mathbf{t}))$ där $\mathbf{t}$ och $\mathbf{g}$ uttrycks som i steg 1 och steg 2. Kedjeregeln uttrycks

$$\frac{\partial}{\partial t_j} f(\mathbf{g}(\mathbf{t})) = \sum_{k=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{g}(\mathbf{t})) \cdot \frac{\partial g_k(\mathbf{t})}{\partial t_j}. \tag{13}$$

Detta följer från steg 2 på samma sätt som steg 1 följer från envariabelanalysen.

5 Riktningsderivata och gradient

De partiella derivatorna innehåller värdefull information om hur en funktion beter sig i en punkt. Det är därför av intresse att samla denna information i ett begrepp. Låt $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ vara en differentierbar funktion av n variabler där $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Då definieras gradienten, $\nabla f(\mathbf{x})$, som

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right). \quad (14)$$

Gradienten är alltså en vektor innehållande funktionens alla partiella derivator. Termen kan sägas vara en generalisering av derivatabegreppet för en funktion av flera variabler.

Givet f kan även riktningsderivatan, det vill säga förändringshastigheten längs med en specifik riktning, beräknas. Mängden av alla riktningar i $\mathbb{R}^n$ ges av $\{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{u}\| = 1\} = s^{n-1}$ och kan geometriskt representeras av en $(n-1)$ -dimensionell enhetssfär. Låt $\mathbf{u} \in s^{n-1}$. Riktningsderivatan $f_u(\mathbf{x})$ i riktning $\mathbf{u}$ definieras då som

$$f_u(\mathbf{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})}{h} \quad (15)$$

Då $\|\mathbf{u}\| = 1$ och $\mathbf{x}$ är en inre punkt i f 's definitionsmängd kommer gränsvärdet att vara väldefinierat. Notera även att partiell derivata är ett specialfall av riktningsderivata där riktningen ges av en basvektor.

Sats 2.46 från Persson Böiers: Om $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ är differentierbar i $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ så existerar riktningsderivatan för alla $\mathbf{u} \in s^{n-1}$ och $f_u(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{u}$.

Bevis: Definitionen av differentierbarhet från avsnitt 2 ger

$$f(\mathbf{a} + h\mathbf{u}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot h\mathbf{u} + \|h\mathbf{u}\|\rho(\|h\mathbf{u}\|)$$

där $\rho(\|h\mathbf{u}\|) \rightarrow 0$ när $\|h\mathbf{u}\| \rightarrow 0$.

$$\implies f_u(\mathbf{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{a})}{h} = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{u}$$

Eftersom $\nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{u} = \|\nabla f(\mathbf{a})\| \cos \theta$ där θ är vinkeln mellan gradienten och den riktningen som derivering sker med avseende på så ger även satsen att förändringshastigheten i $\mathbf{a}$ är som störst när $\theta = 0$ det vill säga i gradientens riktning.

6 Nivåkurvor och nivå(hyper)ytor

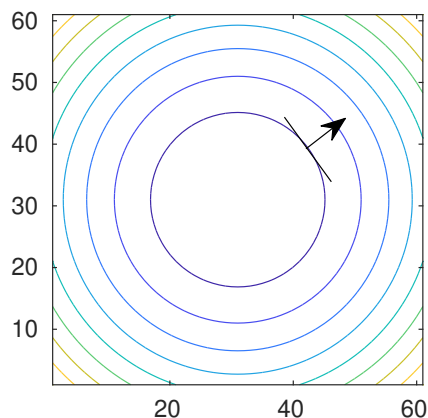
Låt $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ vara en differentierbar funktion av $n + 1$ variabler och punkten $\mathbf{a} = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Ekvationen $f(\mathbf{a}) = c$, där $c \in \mathbb{R}$, representerar i allmänhet en n -dimensionell yta i $\mathbb{R}^{n+1}$. En sådan yta kallas för en nivåkurva då $n = 1$, nivåyta då $n = 2$, respektive nivåhyperyta då $n > 2$.

Eftersom funktionen f antar ett konstant värde bör funktionens riktningsderivata i $\mathbf{a}$ vara noll. Riktningsderivatan kan därför uttryckas som

$$f_u(\mathbf{a}) = \|\nabla f(\mathbf{a})\| \cdot \|\mathbf{u}\| \cdot \cos \theta = 0$$

där $\mathbf{u} \in S^n$ är en riktning och θ är vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\nabla f(\mathbf{a})$. Under antagandet att $\nabla f(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$ uppfylls likheten då $\cos \theta = 0$, det vill säga då $\nabla f(\mathbf{a})$ är ortogonal mot $f_u(\mathbf{a})$. Detta innebär geometriskt att $\nabla f(\mathbf{a})$ är en normalvektor till tangenten till f :s nivåkurva i punkten $\mathbf{a}$.

I nedan exempel ges nivåkurvorna av funktionen $f(\mathbf{a}) = x^2 + y^2 = c$ där varje värde hos konstanten c ger upphov till en ny nivå.



Figur 2: $f(\mathbf{a}) = x^2 + y^2 = c$. Gradienten $\nabla f(\mathbf{a})$ är markerad med en pil ortogonal mot nivåkurvans tangentlinje.