Föreläsning #14

DEL 1 NÅGRA ENKLA FYSIKALISKA TILLÄMPNINGAR AV TRIPPELINTEGRALER

Massa

+ Kvadrerbara

Om ett föremål ockuperar det kompakta området $D \subseteq \mathbb{R}^3$ och har varierande densitet $\rho = \rho(x,y,z)$ så ges den totala massa av

$$M = \iiint_D \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

Medelvärden och Masscentrum

Def Låt $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ vara en integrerbar funktion av 3 variabler och $D \subseteq \mathbb{R}^3$ en kompakt & kvadrerbar mängd. Medelvärdet av f på D ges av

$$\bar{f}_D = \frac{1}{\text{vol}(D)} \iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dx\,dz$$

$$= \iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \Big/ \iiint_D 1 \cdot dx\,dy\,dz$$

<u>Masscentrumet</u> av ett föremål är medelvärdet av positionen av dess massa

Således ges det av $\bar{m} = (m_x, m_y, m_z)$ där

$$\left.\begin{matrix} m_x \\ y \\ z \end{matrix}\right\} = \frac{\iiint_D \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz}{\iiint_D \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz} \quad \ldots (*)$$

<u>Ex. 1</u> (7.5)

Kroppen K bestäms av $y \geq 0$, $z \geq 0$, $y \leq x$ och $z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}$. Dess densitet är $\rho(x,y,z) = x^2+y^2$. Bestäm kroppens massa.

<u>Lösning</u> $$M = \iiint_D \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz,$$

där $\rho(x,y,z) = x^2+y^2$
och $D = \{(x,y,z) \mid y \geq 0,\ z \geq 0,\ y \leq x,\ z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}\}$

Notera att D ligger mellan funktionsytorna
$z = 0$ (xy-planet)
$z = \sqrt{4-x^2-y^2}$ (en upp och ner paraboloid med bas i (0,0,2))

$$\Rightarrow \iint_{\Pi(D)} (x^2+y^2)\,dx\,dy \int_{z=0}^{z=\sqrt{4-x^2-y^2}} dz$$

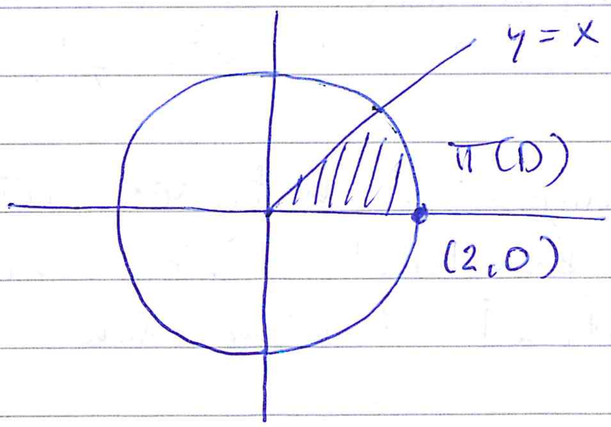
$$= \iint_{\Pi(D)} (x^2+y^2)\sqrt{4-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

Här gäller :

$$\Pi(D) = \{(x,y) \mid y \geq 0,\ y \leq x,\ \underbrace{x^2+y^2 \leq 4}\}$$

den upp och ner paraboloiden
korsar xy-planet i cirkeln
$z = 0 = \sqrt{4-x^2-y^2} \iff x^2+y^2 = 4$

Bild :



Klart vi ska byta till polära koordinater
(m.a.o. hela trippelintegralen beräknas
via byte till cylindriska koordinater)

$\longrightarrow$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/4} \int_0^2 r^2 \sqrt{4-r^2} \, r \, dr \, d\theta$$

$$= \pi/4 \int_0^2 r^3 \sqrt{4-r^2} \, dr$$

$$\overset{u=4-r^2}{=} \frac{\pi}{8} \int_0^4 (4-u)\sqrt{u} \, du$$

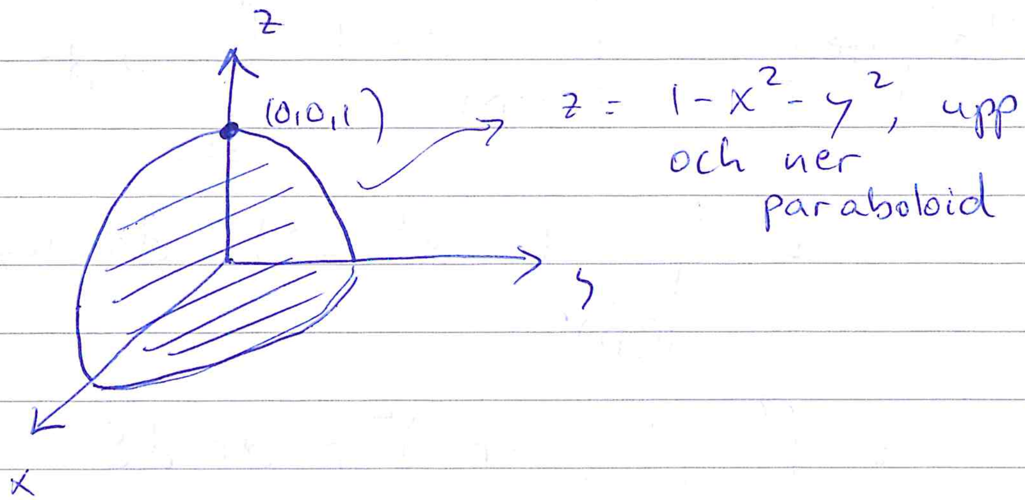
$$= \pi/8 \left(8/3 \cdot u^{3/2} - 2/5 \cdot u^{5/2} \right) \Big|_{u=0}^{u=4}$$

$$= \pi/8 \left(8/3 \cdot 8 - 2/5 \cdot 32 \right) = \ldots = \frac{16}{15}\pi .$$

<u>Ex. 2</u> Bestäm masscentrumet för den kropp som består av ett homogent material och som begränsas av xy-planet och paraboloiden $z = 1 - x^2 - y^2$.

<u>OBS!</u> "Homogent" betyder att densiteten är konstant. Det innebär att ρ är en konstant faktor som kancellerar i (*) s.a.

$$m_x = \frac{\iiint_D x \, dx \, dy \, dz}{\iiint_D dx \, dy \, dz} \quad , \text{ och p.s.s. för } m_y, m_z .$$



$\pi(D) = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$, enhetsskivan

Vi observerar först att området D är uppenbarligen symmetrisk kring z-axeln, dvs symmetrisk m.a.p. både $x \mapsto -x$ och $y \mapsto -y$

$\Rightarrow$ Vi vet direkt att $m_x = m_y = 0$.

Återstår $m_z = \dfrac{\iiint_D z\, dx\, dy\, dz}{\iiint_D dx\, dy\, dz}$

<u>Nämnaren</u>: $\iint_{\pi(D)} dx\, dy \int_{z=0}^{z=1-x^2-y^2} dz$

$= \iint_{\pi(D)} (1-x^2-y^2)\, dx\, dy$

$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1-r^2)\, r\, dr\, d\theta = \ldots = \dfrac{\pi}{2}$.

Täljaren $\iint_{\pi(D)} dx\,dy \int_{z=0}^{z=1-x^2-y^2} z\,dz$

$= \frac{1}{2} \iint_{\pi(D)} (1-x^2-y^2)^2\,dx\,dy$

$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1-r^2)^2\, r\,dr\,d\theta$

$= \ldots = \pi/6 .$

$\Rightarrow m_z = \pi/6 \,/\, \pi/2 = 1/3$

$\Rightarrow \bar{m} = (0, 0, 1/3)$ $\rightsquigarrow$ Kanske gissbart från början.

(ENG: Moment of Inertia)

Tröghetsmoment (ej examinerbar)

Låt L vara en linje i $\mathbb{R}^3$ (en s.k. axel) och $D \subseteq \mathbb{R}^3$ vara en kompakt, kvadrerbar mängd.

Om ett föremål med varierande densitet $\rho = \rho(x, y, z)$ ockuperar området D, så ges den tröghetsmoment kring axeln L av

$$I_L = \iiint_D \rho\, d^2\, dx\,dy\,dz, \quad \text{där}$$

$d = d(x,y,z)$ är avståndet från (x,y,z) till (närmaste punkt på) L.

Formeln blir enklast i fall L är någon av koordinataxlarna.

z-axeln : $d(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$

$$\Rightarrow I_z = \iiint_D (x^2+y^2)\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

y-axeln : $d(x,y,z) = \sqrt{x^2+z^2}$

$$\Rightarrow I_y = \iiint_D (x^2+z^2)\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

x-axeln : $d(x,y,z) = \sqrt{y^2+z^2}$

$$\Rightarrow I_x = \iiint_D (y^2+z^2)\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

OBS! Tröghetsmoment spelar samma roll för rotation kring en axel som vanlig massa gör för vanlig rörelse

Kinetisk energi $= \frac{1}{2} m v^2$ (v = fart)
$= \frac{1}{2} I \omega^2$ (ω = vinkelfart)

(ty $v = \omega d$, från enkel trigonometri)

DEL 2 MULTIPELINTEGRALER, DVS INTEGRATION FÖR FUNKTIONER AV ETT GODTYCKLIGT ANTAL VARIABLER

Notation: $\int\int\cdots\int f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n$

Kan förkorta till: $\int f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$,

där det är underförstått att $\int$ representerar en n-dimensionell integral.

Vi nöjer oss nu med ett (roligt) exempel.
Se s. 297 i boken.

Låt B_n vara det n-dimensionella enhetsklotet, dvs

$$B_n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$$
$$= \{(x_1,\ldots,x_n) \mid \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq 1\}$$

Sätt $\mu_n := \mathrm{vol}(B_n) \overset{\text{def}}{=} \int_{B_n} 1\cdot d\mathbf{x}$

Sats Vi har följande rekursionsformel för μ_n:

$$\mu_1 = 2,\quad \mu_2 = \pi,\quad \mu_n = \frac{2\pi}{n}\mu_{n-2} \quad \forall\, n \geq 3.$$

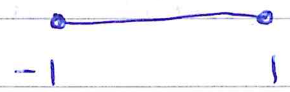
Anm: $n = 3 \Rightarrow \mu_3 = \frac{2\pi}{3}\mu_1 = \frac{4\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}(1^3)$, vilket stämmer överens med det vi redan vet är volymen av enhetsklotet i $\mathbb{R}^3$.

Lemma För $r > 0$ låt $B_{n,r} = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r \}$.
Då är $\mathrm{vol}(B_{n,r}) = \mu_n \cdot r^n$.

Bevis Trivialt. Man har skalat $B_{n,1}$ med en faktor r i varje riktning.

Bevis av Satsen

$n=1$ $B_1 = \{ x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 1 \}$



$$\mu_1 = \int_{-1}^{1} dx = 2.$$

$n=2$ $B_2 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \}$

$$\mu_2 = \pi(1^2) = \pi.$$

$n \geq 3$ Notera först att

$$\|x\|^2 \leq 1 \iff \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq 1$$

$$\iff x_{n-1}^2 + x_n^2 \leq 1 - \sum_{i=1}^{n-2} x_i^2 \quad \ldots (*)$$

Nu tillämpar vi Fubini:

$$\mu_n = \int_{B_n} 1 \cdot dx_1 \ldots dx_n = \int_{B_{n-2}} dx_1 \ldots dx_{n-2} \iint_{(*)} dx_{n-1}\, dx_n$$

$\longrightarrow$

För fixt $x_1, \ldots, x_{n-2}$ så beskriver (*) en 2-dimensionell skiva, och den inre dubbelintegralen är dess area.

$$\Rightarrow \quad \mu_n = \pi \int_{B_{n-2}} \left(1 - \sum_{i=1}^{n-2} x_i^2\right) dx_1 \ldots dx_{n-2} \quad \ldots (**)$$

Nu tillämpar vi metoden med nivåytor, fast i $n-2$ dimensioner.

Sätt $\quad g(x_1, \ldots, x_{n-2}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n-2} x_i^2}$

$$h(u) = 1 - u^2$$

Integranden i (**) är då $h(g(x_1, \ldots, x_{n-2}))$.

I bollen B_{n-2} gäller $0 \leq g \leq 1$.

Alltså kan den $(n-2)$-dimensionella integralen ersättas med en enkelintegral:

$$\int_{B_{n-2}} \left(1 - \sum_{i=1}^{n-2} x_i^2\right) d\mathbf{x} = \int_0^1 h(u)\, V'(u)\, du, \quad \text{där}$$

$$V(u) = \underset{\substack{\uparrow \\ (n-2)\text{-dim}}}{\mathrm{vol}} \left(\{ \mathbf{x} \in B_{n-2} \mid 0 \leq g(\mathbf{x}) \leq u \} \right)$$

Men $0 \leq g(x) \leq u$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n-2} x_i^2 \leq u^2 ,$$

vilket beskriver ett klot av radie u i $\mathbb{R}^{n-2}$, m.a.o. mängden $B_{n-2,u}$.

Enligt lemmat,

$$V(u) = \mu_{n-2} \cdot u^{n-2}$$

Alltså:

$$\mu_n = \pi \int_0^1 (1-u^2) \frac{d}{du} \left(\mu_{n-2} u^{n-2} \right) du$$

$$= \cancel{\mu_{n-2} \int_0^1 (u^{n-2})' - u}$$

$$= \pi \int_0^1 \mu_{n-2} (n-2)(1-u^2) u^{n-3} \, du$$

$$= \pi \mu_{n-2} (n-2) \left[\frac{u^{n-2}}{n-2} - \frac{u^n}{n} \right]_{u=0}^{u=1}$$

$$= \pi \mu_{n-2} (n-2) \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n} \right)$$

$$= \pi \mu_{n-2} \cancel{(n-2)} \frac{2}{\cancel{(n-2)} n} = \frac{2\pi}{n} \mu_{n-2} \qquad \blacksquare$$

Anmärkning:

Från rekursionsformeln kan man härleda att, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\mu_{2n} = \pi^n / n!$$
$$\mu_{2n+1} = \frac{2^{2n+1} \pi^n n!}{(2n+1)!} \qquad (\dagger)$$

Dessa formler kan enhälligt uttryckas i termer av den s.k. Gammafunktionen

Def: För ett godtyckligt reellt (t.o.m. komplext) tal z definieras

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} \, dt$$ (lätt att se att integralen konvergerar för alla $z \in \mathbb{C}$)

Följande egenskaper kan bevisas:

(1) $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ (tips: partiell integration)

(2) $\Gamma(n+1) = n!$ då $n \geq 0$ är ett heltal (tips: (1) och $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1 = 0!$)

(3) $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ (tips: via lämpligt variabelbyte kan relateras till $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$, och hur vi beräknade denna)

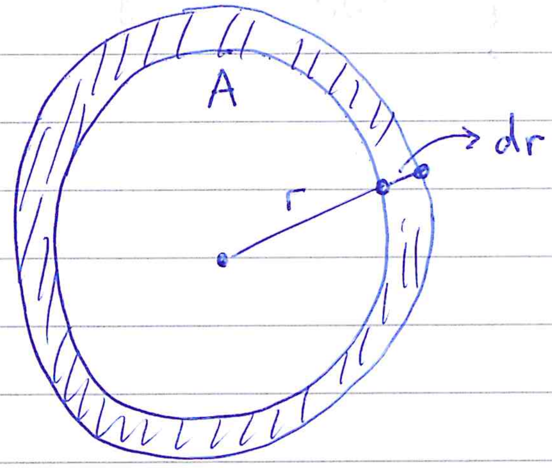
Från (1), (2), (3) kan man härleda att (†) går att skriva om som

$$\mu_{2n} = \pi^n / \Gamma(n+1)$$
$$\mu_{2n+1} = \frac{2}{2n+1} \frac{\pi^{n+1/2}}{\Gamma(n+1/2)} \qquad (\dagger\dagger)$$

Till sist, kom ihåg att

$$S^{n-1} = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1 \}$$

S^{n-1} är alltså randen till B_n.



$$dV = A\,dr$$

Bilden ger intuitionen bakom det lätt bevisade faktumet att

$$\text{Ytarea}(S^{n-1}) = \frac{d}{dr}\left(\text{vol}(B_{n,r})\right)\Big|_{r=1}$$

Sätt $A_n := \text{Ytarea}(S^{n-1})$.

$\longrightarrow$

Alltså: (enligt lemmat)

$$A_n = \frac{d}{dr}\left(\mu_n \cdot r^n\right)\Big|_{r=1}$$

$$A_n = n \cdot \mu_n$$

Med hjälp av (↑↑) samt (1), (2), (3) kan man härleda att

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad A_n = \frac{2 \cdot \pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$$

vilket är ganska snyggt, if I may say so myself!